УДК 62-506.3

И. В. КАЛМЫКОВ, Г. Н. КУКЛИН, А. Л. РЕЗНИК

(Москва — Новосибирск)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Нахождение параметров аппроксимирующих функций обычно осуществляется интерполированием, точечным квадратичным аппроксимированием и методом ортогональных полиномов [1]. К недостатку интерполирования следует отнести необходимость равенства степени аппроксимирующего полинома числу значений заданной функции. Точечное квадратичное аппроксимирование и метод ортогональных полиномов характеризуются достаточно большим объемом вычислений. Кроме того, при использовании отмеченных методов часто получается существенная неравномерность максимальных абсолютных отклонений аппроксимирующих и заданных функций.

Предлагаемый в статье способ основан на составлении систем уравнений, исходя из отклонений длин, площадей, объемов и т. п., образуемых заданной и аппроксимирующей функциями. При этом указанные уравнения могут быть дополняющими к другим уравнениям, составленным известным способом (например, интерполированием). Для функций одной переменной данные уравнения имеют следующий вид:

$$L_3 - \int_{x_0}^{x_n} \sqrt{1 + [Q'(x)]^2}\, dx = \Delta_L; \qquad (1)$$

$$S_3 - \int_{x_0}^{x_n} Q(x)\, dx = \Delta_S, \qquad (2)$$

где L_3 — длина дуги заданной функции, $Q(x)$ — аппроксимирующий полином, (x_0, x_n) — интервал задания функции, S_3 — площадь, ограниченная заданной функцией, Δ_L и Δ_S — соответственно отклонения по длине и площади, которые в зависимости от решаемой задачи могут быть приравнены нулю.

Для пояснения предлагаемого способа рассмотрим несколько часто встречающихся практических задач. При этом будем пользоваться уравнением (2), так как (1) из-за эллиптических интегралов применимо лишь в частных случаях.

Первая задача связана с нахождением параметров аппроксимирующего полинома вида

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i. \qquad (3)$$

Допустим, что требуется определить параметры полинома (3) второй степени при следующих значениях функции:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	1	2	3	4
y	3	1	1,5	4
	y_0	y_1	y_2	y_3

(4)

Как уже было отмечено, может быть два варианта решения по предлагаемому способу. Если требуется получать максимальную точность в определенных (рабочих) точках, то (2) используется как дополняющее. Например, при повышенной точности аппроксимации в точках x_0, y_0 и x_3, y_3 система уравнений может иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0; \\ &a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 = y_3; \\ &a_0(x_2 - x_1) + \frac{a_1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \frac{a_2}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) = S_{12}, \end{aligned} \qquad (5)$$

где S_{12} — площадь, ограниченная заданной функцией на интервале (x_1, x_2).

Первые два уравнения этой системы получены интерполированием, а последнее соответствует (2) при $\Delta_s = 0$. Данная система является определенной, так как ее определитель не равен нулю. Поэтому, определив величину S_{12} на основе кусочно-линейной аппроксимации функции, после решения системы получим следующие значения параметров*: $a_0 = \frac{266}{39}$, $a_1 = \frac{189{,}5}{39}$, $a_2 = \frac{13{,}5}{13}$.

Во втором варианте система полностью составляется из уравнений (2). Например,

$$\begin{aligned} &a_0(x_1 - x_0) + \frac{a_1}{2}\left(x_1^2 - x_0^2\right) + \frac{a_2}{3}\left(x_1^3 - x_0^3\right) = S_{01}; \\ &a_0(x_2 - x_1) + \frac{a_1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \frac{a_2}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) = S_{12}; \\ &a_0(x_3 - x_2) + \frac{a_1}{2}\left(x_3^2 - x_2^2\right) + \frac{a_2}{3}\left(x_3^2 - x_2^3\right) = S_{32}, \end{aligned}$$

где S_{01}, S_{12}, S_{32} — площади, ограниченные заданной функцией соответственно на интервалах (x_0, x_1), (x_1, x_2) и (x_1, x_3). Решив данную систему, получим $a_0 = 7{,}25$, $a_1 = -5{,}25$, $a_2 = 1{,}125$.

Значение аргумента	x_0	x_1	x_2	x_3
I вариант	0	+0,26	+0,09	0
II вариант	+0,125	+0,25	+0,125	+0,25

Значения отклонений между заданной и аппроксимирующей функциями приведены в таблице.

Очевидно, уменьшив величину a_0, можно снизить максимальную величину погрешности. Например, приняв $a_0 = 7{,}0625$ при втором варианте, получим максимальное отклонение, равное 0,0625. Для сравнения отметим, что при решении той же задачи на основе точечного квадратичного аппроксимирования максимальное отклонение составляет 0,075.

Вторая задача относится к аппроксимации функции с выполнением условия равномерного приближения.

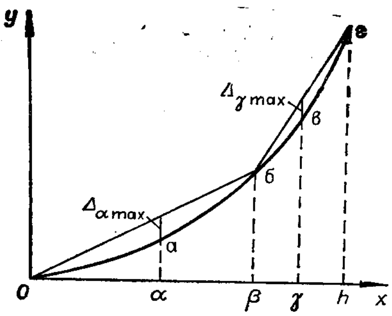

Рис. 1.

Допустим, что требуется осуществить кусочно-линейную аппроксимацию заданной функции $y = f(x)$. Данная задача сводится к нахождению оптимальных границ интервалов разбиения аргумента или числа участков разбиения при заданной погрешности. Обычно при ре-

* В случае большего числа заданных при определении площадей рекомендуется пользоваться формулой Симпсона.

шении указанных задач используют выражение для остаточного члена интерполяционной формулы Ньютона [1]. К недостаткам данной методики относятся необходимость отыскания значений второй производной, завышенное число участков разбиения и неудобство при задании функции в виде таблицы.

Будем считать, что заданная функция является монотонной и аппроксимация проводится на интервале $(0, h)$ при двух участках разбиения (рис. 1). Очевидно, что рассматриваемый случай сводится к определению границы участков разбиения — величины β. Для определения β представим уравнение (2) для двух интервалов $(0, \beta)$ и (β, h) в следующем виде:

$$0{,}5 f(\beta)\beta - \int_0^\beta f(x)\,dx = \Delta_{S1} + \Delta'_{S1};$$
$$0{,}5\,[f(\beta) + f(h)](h-\beta) - \int_\beta^h f(x)\,dx = \Delta_{S2} + \Delta'_{S2}; \qquad (6)$$

где Δ'_{S1} и Δ'_{S2} — площади, образованные кривой $f(x)$ и ломаной 0абвг соответственно на участках $(0, \beta)$ и (β, h), причем точки а и б соответствуют значениям $f(x)$, при которых отклонения от аппроксимирующей ломаной 0бг максимальны. Поэтому, разделив выражения (6) на величины их интервалов и приравняв

$$\frac{\Delta_{S1}}{\beta} = \frac{\Delta_{S2}}{h-\beta}, \qquad (7)$$

получим выполнение условия равномерного приближения, так как данные отношения соответствуют максимальным отклонениям.

Равенство (7) с учетом выражений (5) имеет следующий вид:

$$f(\beta) - \frac{2}{\beta}\int_0^\beta f(x)\,dx - 2\frac{\Delta'_{S1}}{\beta} = f(\beta) + f(h) - \frac{2}{h-\beta}\int_\beta^h f(x)\,dx - \frac{2\Delta'_{S2}}{h-\beta},$$

или

$$f(h) - 2\left(\frac{1}{h-\beta}\int_\beta^h f(x)\,dx - \frac{1}{\beta}\int_0^\beta f(x)\,dx\right) - \delta = 0, \qquad (8)$$

где

$$\delta = 2\left(\frac{\Delta'_{S2}}{h-\beta} - \frac{\Delta'_{S1}}{h}\right).$$

Пренебрегая величиной δ ввиду ее малости, получим приближенное выражение для определения β:

$$f(h) - 2\left(\frac{1}{h-\beta}\int_\beta^h f(x)\,dx - \frac{1}{\beta}\int_0^\beta f(x)\,dx\right) = 0. \qquad (9)$$

Хотя данное выражение является приближенным, оно позволяет с достаточно высокой степенью точности определять границы интервалов разбиения. Например, для функции $y=x^3$, заданной на интервале $(0, 1)$, выражение (9) принимает следующий вид: $\beta^2+\beta-1=0$, откуда $\beta = 0{,}5(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$.

Такой же результат получается и при точном решении данной задачи через производные, но при этом требуется определять β из уравнения

$$\beta^3 - (1+\beta+\beta^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\beta(1+\beta) = 0.$$

При точечном задании функции $y=f(x)$ с n равноотстоящими узлами x_i и при определении интервала с помощью метода трапеций выражение (9) принимает следующий вид:

$$y_n(n-i)+\frac{n}{i}(y_0+2y_1+\ldots+2y_{i-1}+y_i)=C,$$

где y_i — значение заданной функции при x_i,

$$C=y_0+2y_1+\ldots+2y_i+\ldots+2y_{n-1}+y_n.$$

Значение i будет определяться из условия наименьшего отклонения между левой и правой частями данного выражения.

Если требуется найти аппроксимирующую функцию при m интервалах разбиения, то составляется система $(m-1)$ уравнений с неизвестными x_i следующего вида:

$$f(x_{i+1})-f(x_{i-1})-\frac{2}{x_{i+1}-x_i}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx-\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\right]=0. \quad (10)$$

При нахождении количества интервалов, исходя из заданной точности аппроксимации, может быть рекомендован способ решения, основанный на последовательном делении найденных интервалов на две части до тех пор, пока величина

$$\Delta=0{,}5\left[f(x_i)+f(x_{i-1})\right]-\frac{1}{x_i-x_{i-1}}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

не станет меньше заданной погрешности аппроксимации. Очевидно, в этом случае количество m получаемых участков может быть завышенным из-за их четности. Поэтому с целью проверки следует составить и решить систему из $m-2$ уравнений (10) для $m-1$ участка и определить погрешность для данного случая.

В заключение можно отметить, что все изложенные алгоритмы нахождения параметров аппроксимирующих функций представляют собой достаточно прозрачные конструкции для того, чтобы без особых затрат они были запрограммированы и реализованы с помощью ЭВМ. Этот момент является весьма существенным, так как приводимые алгоритмы чаще всего на практике могут понадобиться в прикладных задачах, требующих, как правило, машинной реализации. На рис. 2 приводится пример, иллюстрирующий расчет, проведенный с помощью ЭВМ «Минск-32». Результаты расчета выведены на графопостроитель «Вектор-1301» [2] с использованием математического обеспечения, разработанного в ИАЭ СО АН СССР [3]. Результат работы ЭВМ — парабола, являющаяся решением системы (5) для функции, заданной таблицей (4).

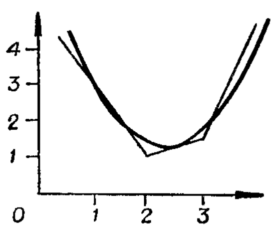

Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 1. М., «Наука», 1966.
2. А. Н. Гинзбург и др. Графопостроительная система «Вектор».— Управляющие системы и машины, 1974, № 5.
3. А. Н. Гинзбург, А. В. Логинов, В. М. Плясов. Програмное обеспечение к системе графического вывода.— Автометрия, 1973, № 2.

Поступила в редакцию 17 октября 1974 г.