

Л. И. ДОВБЕТА, Б. Л. РЫВКИН, Б. А. ШКОЛЬНИК
(Ленинград)

ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Отличие реальных характеристик преобразователя от расчетных вызывает искажения сигнала, которые являются источниками погрешности преобразователя. Реальным преобразователям присущи как линейные (амплитудно-частотные и фазочастотные), так и нелинейные искажения. В данной статье рассматриваются методы оценивания погрешности преобразователей, обладающих существенными (по сравнению с другими составляющими) нелинейными искажениями. Простейшей моделью нелинейного преобразователя является безынерционное звено. Такая модель хорошо описывает работу преобразователя при сравнительно узкополосных входных процессах, когда зависимостью характеристик преобразователя от частоты можно пренебречь. Поскольку нелинейные искажения принято характеризовать такими показателями, как коэффициент гармоник или коэффициент нелинейных искажений, которые относятся к синусоидальным входным сигналам, представляет интерес установление зависимости между этими показателями и погрешностью преобразования сигналов сложной формы, в частности, случайных процессов.

Уровень искажений будем оценивать дисперсией продуктов искажений. Как известно [1], для безынерционного преобразователя со статической характеристикой $f(u)$ второй начальный момент выходного сигнала равен

$$m_2 = \int_{b_1}^{b_2} f^2(u) p(u) du, \quad (1)$$

где $p(u)$ — плотность распределения входного сигнала.

Для симметричных пределов измерения ($|b_1| = |b_2| = b$) выражение (1) с помощью преобразования координат $x = u/b$ (рис. 1, а, б) можно переписать в виде

$$m_2 = \int_{-1}^1 f^2(x) p_0(x) dx. \quad (2)$$

Для несимметричных пределов измерения для этой же цели применяется другое преобразование координат:

$$x = \frac{b_2 - b_1}{2} u + \frac{b_2 + b_1}{2}. \quad (3)$$

При расчете нелинейных искажений в эти формулы вместо $f(x)$ следует подставлять функцию остаточной нелинейности

$$\psi(x) = f(x) - k_2 x. \quad (4)$$

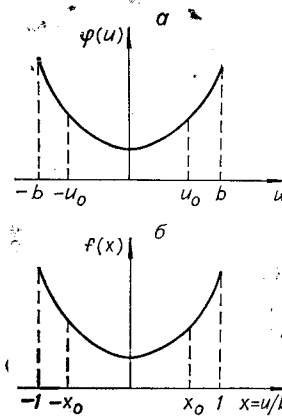


Рис. 1.

Здесь k_n — номинальный коэффициент передачи преобразователя.

Представим статическую характеристику преобразователя в виде отрезка ряда по полиномам Чебышева:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(x), \quad (5)$$

где $T_i(x) = \cos(i \arccos x)$. При таком разложении весовые коэффициенты a_i имеют простую физическую интерпретацию: они равны амплитудам гармоник выходного сигнала при подаче на вход нелинейного звена сигнала $x = \cos \omega t$.

Функция остаточной нелинейности при этом выразится так:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(x) - x \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^i (2i+1) a_{2i+1}, \quad (6)$$

где $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{n-1}{2}$.

Дисперсия погрешности за счет нелинейных искажений равна

$$\sigma_n^2 = m_2 - m_1^2. \quad (7)$$

Здесь $m_1^2 = \left(\int_{-1}^1 \psi(x) p_0(x) dx \right)^2$, где m_1 — математическое ожидание выходного сигнала измерительного преобразователя; $p_0(x)$ — функция, получаемая из $p(u)$ в результате преобразования аргумента (3).

Назовем интеграл

$$\mu_i = \int_{-1}^1 T_i(x) p_0(x) dx \quad (8)$$

i -м чебышевским моментом распределения $p_0(x)$. Будем рассматривать симметричные распределения. При этом все нечетные чебышевские моменты будут равны нулю: $\mu_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Принимая во внимание соотношения

$$T_i^2(x) = \frac{1}{2} [T_{2i}(x) + T_0(x)];$$

$$T_i(x) T_j(x) = \frac{1}{2} [T_{|i-j|}(x) + T_{i+j}(x)], \quad (9)$$

являющиеся следствием для полиномов Чебышева рекуррентной формулы, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n a_i^2 (1 + \mu_{2i}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n a_i a_j (\mu_{|i-j|} + \\ & + \mu_{i+j}) - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} a_{2i+1} (\mu_{2(i+1)} + \mu_{2i}) - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^i (2i+1) a_{2i+1} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^i (2i+1) a_{2i+1}^2 (\mu_2 + \mu_0) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i}^2 \mu_{2i}^2 - \sum_{i,j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i} a_{2j} \mu_{2i} \mu_{2j} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Относительная погрешность запишется в виде

$$\sigma_n = \sigma_n / \sigma_x \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (-1)^i (2i+1) a_{2i+1}, \quad (11)$$

где σ_x — среднеквадратическое значение выходного сигнала. Из выражений (10), (11) следует, что квадрат относительной погрешности с точностью до постоянного множителя может быть представлен квадратичной формой $n-1$ аргумента:

$$\delta_n^2 = \sum_{i=2}^n a_{ii} \gamma_i^2 + \sum_{i,j=2}^n a_{i,j} \gamma_i \gamma_j, \quad \gamma_i = \frac{a_i}{a_1}. \quad (12)$$

Здесь a_{ij} ; $i, j=2, 3, \dots, n$ — коэффициенты квадратичной формы, выражаемые через чебышевские моменты распределения входного сигнала.

Известно [2], что квадратичная форма может быть единственным образом приведена к каноническому виду:

$$\delta_n^2 = \sum_{i=2}^n \lambda_i \tilde{\gamma}_i^2, \quad (13)$$

где λ_i — характеристические числа данной квадратичной формы; $\tilde{\gamma}_i$ — преобразованные координаты.

Найдем верхнюю и нижнюю границы погрешности. Для этого следует рассмотреть условия, при которых выражение (13) достигает экстремальных значений. Из физических соображений следует, что квадратичная форма (12) является положительно определенной. Обозначим наименьшее и наибольшее характеристические числа соответственно λ_{\min} и λ_{\max} . Тогда

$$\lambda_{\min} \sum_{i=2}^n \tilde{\gamma}_i^2 \leq \sum_{i=2}^n \lambda_i \tilde{\gamma}_i^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=2}^n \tilde{\gamma}_i^2. \quad (14)$$

На основании закона инерции квадратичных форм $\sum_{i=2}^n \gamma_i^2 = \sum_{i=2}^n \tilde{\gamma}_i^2$ выражение (14) можно переписать:

$$\lambda_{\min} \sum_{i=2}^n \gamma_i^2 \leq \sum_{i=2}^n \lambda_i \gamma_i^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=2}^n \gamma_i^2. \quad (15)$$

Замечая, что

$$\sum_{i=2}^n \gamma_i^2 = \frac{\sum_{i=2}^n a_i^2}{a_1^2} = k_r^2,$$

где k_r — коэффициент гармоник выходного сигнала, соответствующий входному $x = \cos \omega t$, с учетом выражения (15), получим

$$k_r \sqrt{\lambda_{\min}} \leq \delta_n \leq k_r \sqrt{\lambda_{\max}}. \quad (16)$$

Таким образом, зная коэффициент гармоник k_r измерительного преобразователя и найдя характеристические числа квадратичной формы (12) по формуле (16) можно определить верхнюю и нижнюю границы погрешности за счет нелинейности преобразования для случайного входного сигнала с заданным одномерным распределением.

Рассмотрим приведенную методику для двух случаев:

1) квадратическая нелинейность:

$$n=2; \psi(x) = a_0 - a_2 + 2a_2x^2;$$

2) кубическая нелинейность:

$$n=3; \psi(x) = a_0 - a_2 + 2a_2x^2 + 4a_3x^3.$$

Для этих случаев относительные погрешности равны соответственно

$$\delta_{н2} = \frac{b\gamma_2}{\sigma_x \sqrt{2}} \sqrt{a_{22}}, \quad (17)$$

$$\delta_{н3} = \frac{b}{\sigma_x \sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_{22}\gamma_2^2 + a_{33}\gamma_3^2}{1 - 3a_{33}\gamma_1}}. \quad (18)$$

В области малых нелинейных искажений формула (18) упрощается:

$$\delta_{н3} = \frac{b}{\sigma_x \sqrt{2}} (a_{22}\gamma_2^2 + a_{33}\gamma_3^2)^{1/2}. \quad (19)$$

При этом

$$\begin{aligned} a_{22} &= 1 + \mu_4 - \mu_2^2; \\ a_{33} &= 10 + 15\mu_2 + 6\mu_4 + \mu_6. \end{aligned} \quad (20)$$

В таблице приведены значения чебышевских моментов μ_i , а также значения коэффициентов a_{ii} для разных законов распределения $p(x)$ входного процесса в зависимости от величины $d = u_0/b$ (см. рис. 1).

Из (19) видно, что относительная дисперсия погрешности представляет собой квадратичную форму канонического вида. Поэтому, подставляя выражения a_{22} и a_{33} в (19), получим граничные оценки для $\tilde{\delta}_{н3} = \delta_{н3} \frac{\sigma_x \sqrt{2}}{b}$ зависимости от диапазона изменения входного сигнала

μ_i , a_{ii}	Распределение арксинус $P(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -b; \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{b^2 - x^2}}, & x \leq b; \\ 0, & b < x < \infty. \end{cases}$	Распределение равномерное $P(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -b; \\ \frac{1}{2b}, & x \leq b; \\ 0, & b < x < \infty. \end{cases}$	Распределение Симпсона $P(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -b; \\ \frac{x-b}{b^2}, & -b < x < 0; \\ \frac{b-x}{b^2}, & 0 < x < b; \\ 0, & b < x < \infty. \end{cases}$
μ_2	$a^2 - 1$	$\frac{2}{3}d^2 - 1$	$\frac{1}{3}d^2 - 1$
μ_4	$3d^4 - 4d^2 + 1$	$\frac{8}{5}d^4 - \frac{8}{3}d^2 + 1$	$\frac{8}{15}d^4 - \frac{4}{3}d^2 + 1$
μ_6	$10d^6 - 18d^4 + 9d^2 - 1$	$\frac{32}{7}d^6 - \frac{48}{5}d^4 + 6d^2 - 1$	$\frac{7}{8}d^6 - \frac{16}{5}d^4 + 3d^2 + 1$
a_{22}	d^4	$\frac{32}{45}d^4$	$\frac{14}{45}d^4$
a_{33}	$10d^6$	$\frac{32}{7}d^6$	$\frac{8}{7}d^6$
$a_{22} > a_{33}$	$d < 0,3$	$d < 0,4$	$d < 0,5$
$a_{33} > a_{22}$	$d > 0,3$	$d > 0,4$	$d > 0,5$
$a_{33} = a_{22}$	$d = 0,3$	$d = 0,4$	$d = 0,5$

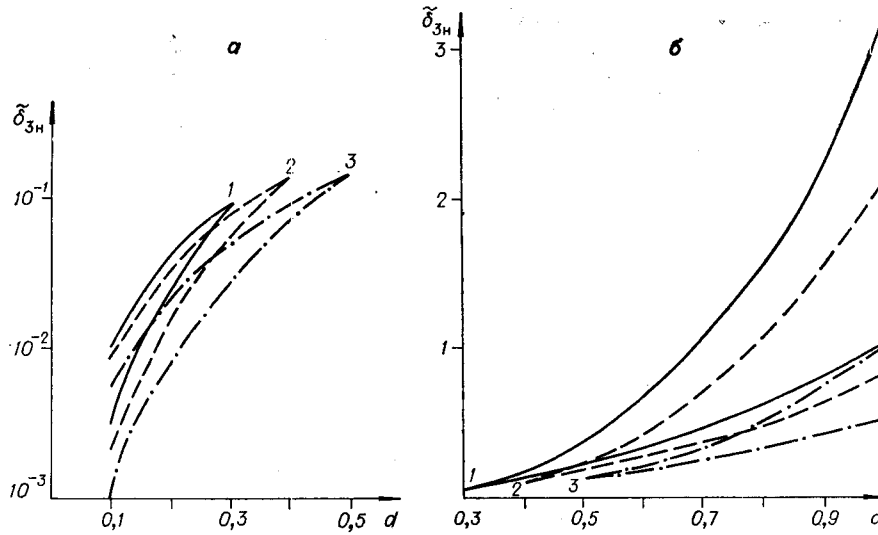


Рис. 2.

d. Эти границы для разных распределений сигнала изображены на рис. 2, *a*, *б*, где кривая 1 — распределение арксинус, 2 — распределение равномерное, 3 — распределение Симпсона.

При рассмотрении инерционных нелинейных преобразователей их чаще всего представляют эквивалентными схемами (рис. 3, *a*, *б*, *в*), составленными из линейных инерционных и нелинейных безынерционных элементов [3].

Пусть статическая характеристика нелинейного звена $f(x)$ описывается полиномом

$$f(z) = b \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{z}{b}\right)^i. \quad (21)$$

Преобразования, осуществляемые первым и вторым линейным звеньями, будем обозначать соответственно A_1 и A_2 . Для трехэлементной структуры (см. рис. 3, *a*) получаем следующие соотношения между входными и выходными сигналами:

$$y = A^2 \left[f\left(\frac{A_1 x}{b}\right) \right] = a_1 A_1 (A_2 x) + \varepsilon_{н}, \quad (22)$$

где $|x| \leq b$;

$$\varepsilon_{н} = b A_2 \sum_{i=2}^n a_i \left(\frac{A_1 x}{b}\right)^i.$$

Первое слагаемое в (22) линейно относительно входного сигнала, второе обусловлено нелинейностью преобразователя.

Приведенное среднеквадратическое отклонение погрешности преобразования, порождаемой нелинейными искажениями, определим выражением

$$\delta_{н} = \frac{\|\varepsilon_{н}\|}{\|y_{ном}\|},$$

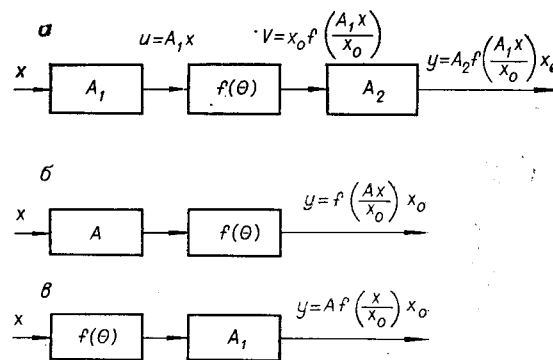


Рис. 3.

где $\|\varphi\|$ — норма в пространстве $L_2(0, T)$, т. е.

$$\|\varphi\| = \|\varphi(t)\| = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Подставляя выражение для ε_n и используя неравенство треугольника, получаем

$$\delta_n = \frac{b \left\| A_2 \sum_{i=2}^n a_i \theta^i \right\|}{k_{\text{НОМ}} \|x\|} \leq \frac{b}{k_{\text{НОМ}}} \|A_2\| \sum_{i=2}^n \frac{|a_i|}{b^i} \|A_1\|^{i-1} \|x\|^{i-1}, \quad (23)$$

где $k_{\text{НОМ}}$ — номинальный коэффициент преобразования.

Нормы линейных операторов определяются таким образом:

$$\|A_k\|_2 = \max_{\omega} |W_k(j\omega)| = |W_k|_{\max}, \quad (24)$$

где $k=1, 2, \dots$; $W_k(j\omega)$ — частотная характеристика k -линейного звена. Окончательно можно записать:

$$\delta_n \leq \frac{1}{k_{\text{НОМ}}} |W_2|_{\max} \sum_{i=2}^n |a_i| |W_1|_{\max}^{i-1} \left(\frac{\sigma_x}{b} \right)^{i-1}. \quad (25)$$

Выражение (25) позволяет получить оценки для двухзвенных структур (рис. 3, б, в).

I. Первое звено линейное; второе нелинейное:

$$\delta_n \leq \frac{1}{k_{\text{НОМ}}} \sum_{i=2}^n |a_i| |W|_{\max}^{i-1} \left(\frac{\sigma_x}{b} \right)^{i-1}. \quad (26)$$

II. Первое звено нелинейное; второе линейное:

$$\delta_n \leq \frac{|W|_{\max}}{k_{\text{НОМ}}} \sum_{i=2}^n |a_i| \left(\frac{\sigma_x}{b} \right)^{i-1}. \quad (27)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Заездный. Основы расчетов по статистической радиотехнике. М., «Связь», 1968.
2. Н. В. Ефимов. Квадратичные формы и матрицы. М., «Наука», 1967.
3. Н. М. Александровский, А. М. Дейч. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.

Поступила в редакцию 12 июня 1974 г.