

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОЦЕССА

При расчете технико-экономических показателей процесса в условиях функционирования АСУ с применением ЭВМ возникают ошибки, обусловленные дискретностью опроса датчиков и методами вычисления показателей. Теоретические основы и методы определения методической ошибки данных расчетов изложены, например, в работах [1, 2].

В данной статье предлагаются инженерные методы определения дисперсии методической погрешности расчета интегральных и средних значений, полученных методом дискретного интегрирования, в зависимости от параметров системы контроля и статистических характеристик исследуемого процесса $X(t)$.

1. При дискретном интегрировании выражение $\int_{t_i}^{t_{n+1}} X(t) dt$ заменяется выражением вида

$$t_0 \sum_{i=1}^n X(t_{i+1}),$$

где t_i — время i -го измерения, t_0 — интервал измерения. Возникающая при этом методическая погрешность равна [1]

$$\Delta S_{\text{ст.м}} = \int_0^{t_0 n} X(t) dt - t_0 \sum_{i=1}^n X(it_0).$$

Проводя соответствующие преобразования, получим формулу для определения дисперсии методической погрешности $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}$ [1]:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}} = & t_0^2 \sum_{i,j=1}^n K_x[(i-j)t_0] - 2t_0 \sum_{i=1}^n \int_0^{nt_0} K_x(it_0 - t) dt + \\ & + \int_0^{nt_0} \int_0^{nt_0} K_x(t - S) dt dS, \end{aligned} \quad (1)$$

где $K_x(\tau)$ — корреляционная функция процесса $X(t)$.

В работах [1, 2] предложены достаточно трудоемкие графоаналитические методы вычисления $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}$. На практике более интересна обратная задача определения значений параметров t_0 , $T = nt_0$, которые обеспечивают получение $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}$, не выше заданной.

Решение прямой и обратной задач доступными инженерными методами составляет предмет этого раздела.

Важную роль при исследовании свойств случайных процессов играет структура корреляционной функции, которая во многих случаях неизвестна. На практике широко используется аппроксимация оценок корреляционных функций выражениями вида

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}; \quad (2)$$

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha\tau^2}. \quad (3)$$

Случайные процессы, имеющие $K_x(\tau)$ вида (2), являются недифференцируемыми, а процессы с корреляционной функцией вида (3) допускают абсолютно точное прогнозирование на любой интервал времени [3]. Реальные процессы не обладают этими свойствами.

Естественно рассматривать дисперсии методических погрешностей дискретного интегрирования, полученные с использованием формул (2), (3), как некоторые оценки дисперсии методической погрешности дискретного интегрирования реальных процессов, имеющих неизвестную нам структуру $K_x(\tau)$. Принимаем, что действительная дисперсия методической погрешности дискретного интегрирования находится внутри интервала оценок, полученных с использованием формул (2), (3). Предполагаем, что аппроксимация оценок $K_x(\tau)$ производится методом наименьших квадратов.

Установим соотношение между параметрами a и α при аппроксимации оценки реальной автокорреляционной функции процесса выражениями вида (2) и (3).

Учитывая то, что оценки корреляционных функций имеют большую достоверность в области малых значений τ при аппроксимации выражения (2) выражением вида (3), в качестве меры рассогласования примем функционал

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} (D_x e^{-\alpha|\tau|} - D_x e^{-a\tau^2})^2 d\tau = 2 D_x^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} (e^{-\alpha\tau} - e^{-a\tau^2})^2 d\tau.$$

Тогда соответствие достигается в такой точке a_0 , что

$$\frac{dI}{da}(a_0) = 0, \text{ т. е. } 1 - \frac{\sqrt{\pi} \alpha e^{\alpha^2/4a_0}}{2\sqrt{a_0}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha/\sqrt{2a_0}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) аппроксимируется выражением $a = \alpha^2/1,314$ с относительной погрешностью $\delta \leq 0,0055\%$, $0,1 \leq \alpha \leq 0,9$.

В случаях если $K_x(\tau)$ имеет вид (2), (3) или представлено формулами

$$K_x(\tau) = \sum_{i=1}^m b_i e^{-\alpha_i |\tau|}; \quad (5)$$

$$K_x(\tau) = \sum_{i=1}^m C_i e^{-a_i \tau^2}, \quad (6)$$

получим аналитические выражения и построим графики для определения $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}$ и $\sigma^2 \Delta_1 S_{\text{мт.с.}}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $m=1$, т. е. когда корреляционная функция процесса имеет вид (2) или (3).

Подставляя выражение (2) в формулу (1) и проведя необходимые преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}}{D_x} &= 2t_0^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) e^{-\alpha i t_0} + \frac{4t_0}{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} \times \\ &\times e^{-\alpha i t_0} + n t_0^2 - \frac{2n t_0}{\alpha} + 2 \frac{t_0}{\alpha} (e^{-\alpha n t_0} + 1) + \frac{2}{\alpha^2} \times \\ &\times (e^{-\alpha n t_0} - 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Зависимость $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}} / D_x$ от α , T , t_0 для некоторых значений аргументов приведена на рис. 1, а—г.

Если корреляционная функция имеет вид формулы (3), графики, аналогичные вышеприведенным, могут быть получены методами численного интегрирования выражения (1). Данные графики приведены на рис. 2, а, б, в, г. Следует сказать, что вычисления должны проводиться с достаточно высокой точностью.

Переходя теперь к случаю, когда корреляционные функции процесса имеют вид (5) или (6) при $m > 1$, заметим, что выражение (1) является линейным относительно $K_x(\tau)$, следовательно, в этом случае

$$\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}(K_x(\tau)) = \sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}} \left(\sum_{i=1}^m K_{x_i}(\tau) \right) = \sum_{i=1}^m \sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}(K_{x_i}(\tau)), \quad (8)$$

где

$$K_{x_i}(\tau) = \begin{cases} b_i e^{-\alpha_i |\tau|}, & \text{если } K_x(\tau) = \sum_{i=1}^m b_i e^{-\alpha_i |\tau|}; \\ C_i e^{-\alpha_i \tau^2}, & \text{если } K_x(\tau) = \sum_{i=1}^m C_i e^{-\alpha_i \tau^2}. \end{cases}$$

В силу того что $K_{x_i}(\tau)$ имеет вид (2) или (3), $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}(K_{x_i}(\tau))$ находится вышеизложенным способом, а вычисление $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}(K_x(\tau))$ по формуле (8) не представляет труда.

2. Для определения интегральных значений компонентов потока в случае, если значение общего расхода Q измеряется непрерывно, а качественные показатели — дискретно, применяется формула весового интегрирования

$$Q_Z = \sum_{i=1}^n Z(t_{i+1}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q(t) dt,$$

и тогда методическая ошибка дискретного интегрирования равна

$$\Delta_2 = \int_{t_1}^{t_{n+1}} Z(t) Q(t) dt - Q_Z. \quad (9)$$

Предположим, что $Z(t)$, $Q(t)$ — стационарные, эргодические случайные процессы, не коррелированные между собой и имеющие следующие вероятностные характеристики: математические ожидания \bar{Z} , \bar{Q} ; корреляционные функции $R_Z(\tau) = D_Z e^{-\alpha|\tau|}$.

Центрируем Z и Q , возведем в квадрат и усредним выражение (9) и после проведения соответствующих преобразований получим формулу для определения дисперсии методической ошибки дискретного весового интегрирования

$$\sigma^2(\Delta_2) = \sigma^2(\hat{\Delta}_2) + \bar{Q}^2 \sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}},$$

где $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}$ — дисперсия методической погрешности дискретного интегрирования процесса $Z(t)$; вычисление $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}$ рассмотрено в разделе 1:

$$\hat{\Delta}_2 = \int_{t_1}^{t_{n+1}} \hat{Z}(t) \hat{Q}(t) dt - \sum_{i=1}^n \hat{Z}(t_{i+1}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{Q}(t) dt,$$

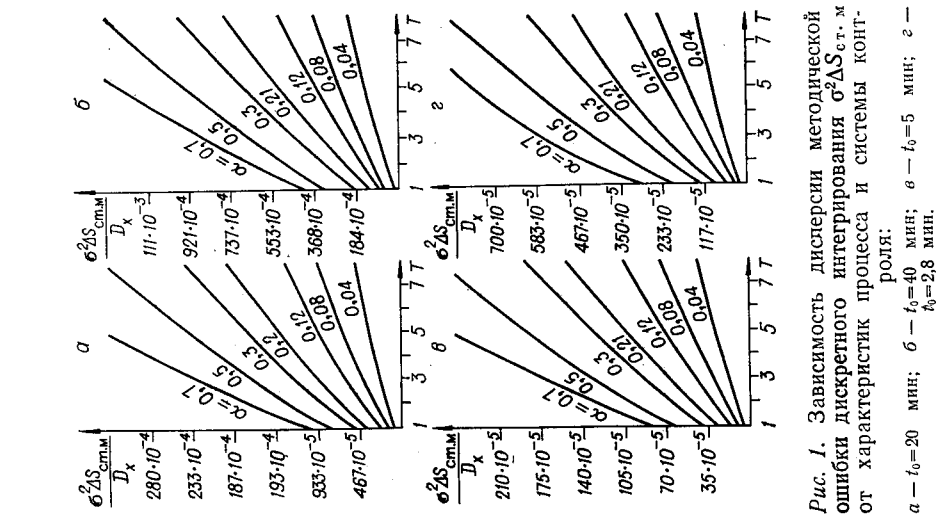


Рис. 1. Зависимость дисперсии методической ошибки дискретного интегрирования $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}$ от характеристик процесса и системы контроля; $a - t_0 = 20$ мин; $b - t_0 = 40$ мин; $в - t_0 = 5$ мин; $г - t_0 = 2,8$ мин.

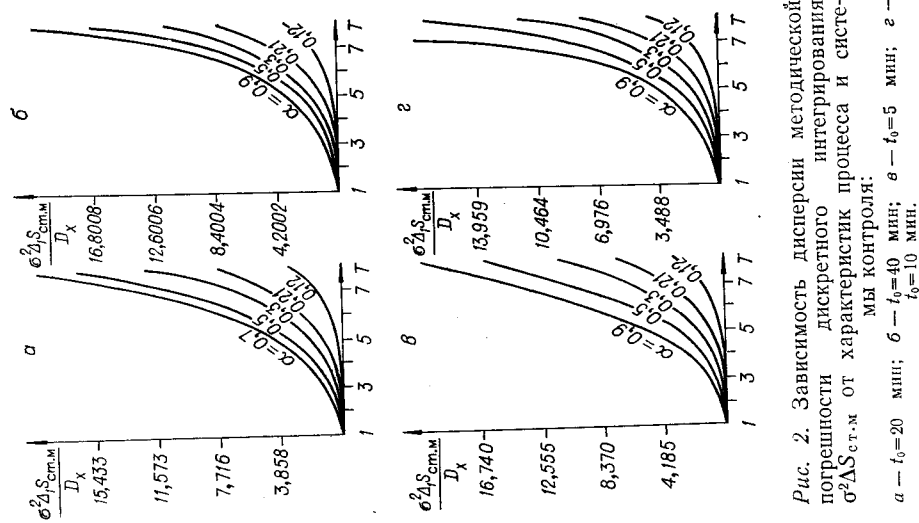


Рис. 2. Зависимость дисперсии методической погрешности дискретного интегрирования $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст.м}}$ от характеристик процесса и системы контроля; $a - t_0 = 20$ мин; $б - t_0 = 40$ мин; $в - t_0 = 5$ мин; $г - t_0 = 10$ мин.

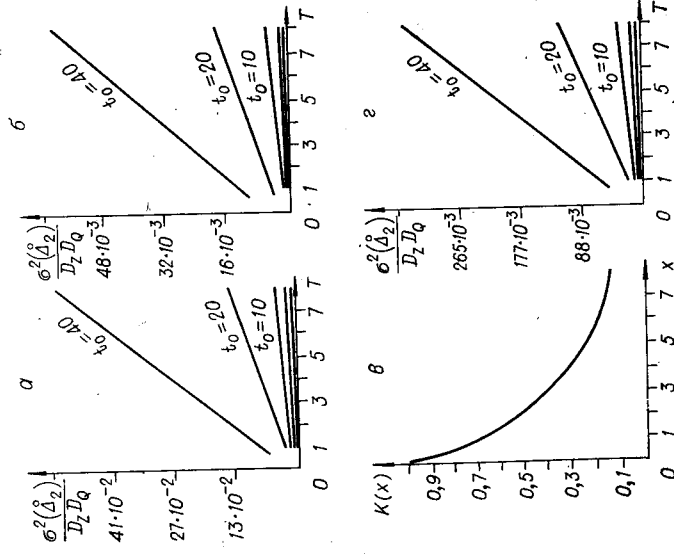


Рис. 3. Зависимость дисперсии методической погрешности весового интегрирования $\frac{\sigma^2(\Delta_2)}{DzDQ}$ от характеристик процесса и системы контроля; $a - a = 0,7$; $б - a = 0,04$; $в - K(x) = K(at/pt)$; $г - a = 0,3$.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2(\overset{\circ}{\Delta}_2)}{D_Q D_Z} = & 2 \sum_{i=1}^{n-1} (C_1)^i \left[\frac{(C_3 + C_3^{-1} - 2)(n-i)}{\alpha^2} + \frac{C_3^{-1} - C_3}{\alpha(a+\alpha)} \right] + \\ & + \frac{2nt_0}{(a+\alpha)} + 2 \frac{C_1^n + 1}{(a+\alpha)^2} + 2 \frac{nt_0}{\alpha} + 2 \frac{n(C_3 - 1)}{\alpha^2} + \\ & + 4 \frac{na(C_3 - C_2)}{\alpha(a^2 - \alpha^2)} + 2 \frac{(C_3^{-1} - 1)(C_1^n + C_3)}{\alpha(a+\alpha)} + 4n(C_2 - 1)(a\alpha)^{-1}, \quad (10) \\ C_2 = & e^{-at_0}, \quad C_3 = e^{-\alpha t_0}, \quad C_1 = C_2 C_3. \end{aligned}$$

Расчеты показали, что выражение (10) слабо зависит от α (для встречающихся на практике значений), поэтому в дальнейших вычислениях α выступает в качестве постоянной ($\alpha = 0,51$).

Графики зависимости $\sigma^2(\overset{\circ}{\Delta}_2)/D_Q D_Z$ от a , t_0 , T представлены на рис. 3, а, б, г.

Приведенный в данном разделе материал может быть использован также для определения дисперсии методической погрешности дискретного весового усреднения $\sigma^2(\Delta_3)$, где

$$\Delta_3 = \Delta_2 \left(\int_{t_1}^{t_{n+1}} Q(t) dt \right)^{-1}.$$

Проведя необходимые преобразования, получим

$$\sigma^2(\Delta_3) = [\sigma^2(\overset{\circ}{\Delta}_2) + \bar{Q}^2 \sigma^2 \Delta S_{\text{ст. м}}] [(\bar{Q}^2 + D_Q K(\alpha n t_0)) (n t_0)^2]^{-1}, \quad (11)$$

где $K(\alpha n t_0) = \left[\frac{2}{\alpha n t_0} + \frac{2}{(n \alpha t_0)^2} (e^{-\alpha n t_0} - 1) \right]$, $\sigma^2 \Delta S_{\text{ст. м}}$ — дисперсия $\Delta S_{\text{ст. м}}$.

Зависимость $K(x)$, $x = n t_0 \alpha$ приведена на рис. 3, в. Расчеты значительно упрощаются, если учесть, что $\bar{Q}^2 \gg D_Q K(\alpha n t_0)$.

В этом случае формула (11) принимает вид

$$\sigma^2(\Delta_3) = \frac{\sigma^2(\overset{\circ}{\Delta}_2)}{(\bar{Q} n t_0)^2} + \frac{\sigma^2 \Delta S_{\text{ст. м}}}{(n t_0)^2}. \quad (12)$$

ВЫВОДЫ

Получены формулы и построены графики, по которым можно определить либо дисперсии методической погрешности дискретного интегрирования, дискретного весового интегрирования и усреднения при заданных характеристиках переменных процесса и системы контроля, либо параметры системы контроля, обеспечивающие заданную методическую погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Немировский. Вероятностные методы в измерительной технике. М., Изд-во стандартов, 1964.
2. М. Я. Гинзбург, И. М. Шенброт. Расчет точности систем централизованного контроля. М., «Энергия», 1970.
3. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.

Поступила в редакцию 23 февраля 1974 г.;
окончательный вариант — 29 мая 1974 г.