АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 2 1975

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 519.2 : 62-50

Ю. В. КОЧУКОВ, В. П. ЦУКАНОВ, Е. П. ЧУРАКОВ
(*Рязань*)

МЕТОД ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Постановка задачи. При решении многих проблем, связанных с радиолокацией, гидроакустикой, распознаванием образов и др., возникает задача оценивания совокупности неизвестных величин по показаниям ряда нелинейных устройств.

В этой задаче выходной сигнал j-го измерителя в момент наблюдения описывается зависимостью

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{\vartheta}_i) + p_j \; (j = \overline{1, r}). \tag{1}$$

Здесь $f_j(\cdot)$ — нелинейная характеристика j-го измерителя, $\vec{\vartheta}_i$ — подлежащий оцениванию i-й k-мерный вектор, p_j — гауссова помеха с априори известными характеристиками. Относительно оцениваемых векторов предполагается, что они неизвестны,

$$\vec{\vartheta}_i \neq \vec{\vartheta}_\nu \quad \text{при всех} \quad i \neq \nu, \quad i, \quad \nu = \overline{1, n};$$

$$\vec{\vartheta}_i \in \Gamma \subset E_k \quad (i = \overline{1, n}),$$

Γ — известная область k-мерного евклидова пространства. В предположении $r > nk$ задача заключается в отыскивании в некотором смысле наилучших оценок $\hat{\vec{\vartheta}}_i$ величин $\vec{\vartheta}_i$ $(i = \overline{1, n})$ по измерениям (1).

Обсуждение возможных подходов. Перепишем наблюдения (1) в векторной форме:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(\vec{\vartheta}_i) + \vec{P}, \tag{2}$$

где $\vec{V}$ — вектор измерений, $\vec{f}(\vec{\vartheta}_i)$ — вектор данных об i-м параметре*, $\vec{p}$ — вектор шумов.

Оценивание неизвестных параметров обычно осуществляется в рамках метода максимального правдоподобия или байесова метода при предположении о равномерном распределении параметров в области их определения (например, [1]). Полагая $\vec{P} \in N(0, \vec{K}_p)$, на основании

* Векторы $\vec{f}(\vec{v}_i)$, $i = \overline{1, n}$, предлагаются линейно независимыми.

модели (2) в первом случае получаем систему уравнений правдоподобия:

$$\frac{d}{d\vec{\vartheta}_k}\vec{f}^{\,T}(\vec{\vartheta}_k)\vec{K}_p^{-1}\left(\vec{V}-\sum_{i=1}^{n}\vec{f}(\vec{\vartheta}_i)\right)\Bigg|_{\substack{\vec{\vartheta}_i=\hat{\vec{\vartheta}}_i\\ i=\overline{1,n}}}=0\ (k=\overline{1,n^2}),\qquad (3)$$

где T — символ транспонирования.

При байесовом подходе, основанном на минимизации среднего риска при квадратичной функции стоимости, т. е. условии

$$M\left\{\sum_{i=1}^{n}\|\vec{\vartheta}_i-\hat{\vec{\vartheta}}_i\|^2\right\}=\min,\qquad (4)$$

где M — символ осреднения, $\|\ldots\|$ — евклидова норма вектора, решение задачи сводится к апостериорным средним

$$\hat{\vec{\vartheta}}_k=\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\vec{\vartheta}_k L(\vec{V}/\vec{\vartheta}_1,\vec{\vartheta}_2,\ldots,\vec{\vartheta}_n)\,d\vec{\vartheta}_1 d\vec{\vartheta}_2\ldots d\vec{\vartheta}_n}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}L(\vec{V}/\vec{\vartheta}_1,\vec{\vartheta}_2,\ldots,\vec{\vartheta}_n)\,d\vec{\vartheta}_1 d\vec{\vartheta}_2\ldots d\vec{\vartheta}_n}\quad (k=\overline{1,n}).\qquad (5)$$

Здесь $L(\cdot)$ — функция правдоподобия, которая, предполагается, вне области Г практически обращается в нуль. Нетрудно видеть, что из-за одинаковой структуры векторов $\vec{f}(\vec{\vartheta}_i)$, $i=\overline{1,n}$, оценки $\hat{\vec{\vartheta}}_i$, $n=\overline{1,n}$, найденные в соответствии с (3) или (5), оказываются совпадающими. Это приводит к необходимости модифицировать отмеченные подходы с целью устранения присущего им ограничения. Одним из путей при этом может явиться переход к оцениванию порядковых статистик [2—4], соответствующих векторам $\vec{\vartheta}_1$, $\vec{\vartheta}_2$, ..., $\vec{\vartheta}_n$, с последующим возвращением к искомым оценкам.

Решение задачи. Расположим в порядке возрастания j—е $(j=\overline{1,k})$ составляющие ϑ_{ij} векторов $\vec{\vartheta}_i(i=\overline{1,n})$, обозначив соответствующую последовательность символами

$$\vartheta_{(1j)}<\vartheta_{(2j)}<\ldots<\vartheta_{(nj)}\ (j=\overline{1,k}).\qquad (6)$$

Введем в рассмотрение вектор $\vec{A}_j$ с компонентами

$$\vec{A}_j^T=(\vartheta_{(1j)},\vartheta_{(2j)},\ldots,\vartheta_{(nj)})\quad (j=\overline{1,k}),\qquad (7)$$

который по определению [2—4] является j-м вектором порядковых статистик. Руководствуясь моделью измерений (2) и байесовым принципом (4), найдем оценки векторов (7). По аналогии с (5) получим их в виде апостериорных средних [5]:

$$\hat{\vec{A}}_j=\frac{\int\limits_{Q}\vec{A}_j\,\sigma(\vec{A}_1,\vec{A}_2,\ldots,\vec{A}_k)\,F(\vec{V}/\vec{A}_1,\vec{A}_2,\ldots,\vec{A}_k)\,d\vec{A}_1 d\vec{A}_2\ldots d\vec{A}_k}{\int\limits_{Q}\sigma(d\vec{A}_1,d\vec{A}_2,\ldots,\vec{A}_k)\,F(\vec{A}_1,\vec{A}_2,\ldots,\vec{A}_k)\,d\vec{A}_1 d\vec{A}_2\ldots d\vec{A}_k},\qquad (8)$$

где $\sigma(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)$ — априорная совместная плотность вероятностей порядковых статистик, $F(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)$ — условная плотность измерений, Q — область существования порядковых статистик. В отличие от векторов $\vec{\vartheta}_i$, которые при образовании (5) предполагались равномерно распределенными, порядковые статистики в силу условий (6) имеют неравномерное распределение, которое устанавливается в соответствии с общей теорией порядковых статистик и применительно к случаю независимых компонентов векторов $\vec{\vartheta}_i$ имеет вид

$$\sigma(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k) = \prod_{j=1}^{k} \sigma(\vec{A}_j); \tag{9}$$

$$\sigma(\vec{A}_j) = (n!) \prod_{i=1}^{n} \sigma(\vartheta_{(ij)}) \prod_{i=1}^{n-1} 1\,(\vartheta_{(i+1,j)} - \vartheta_{(i,j)}),$$

где $1(\cdot)$ — единичная функция,

$$\sigma(\vartheta_{(ij)} = \sigma(\vartheta_{ij})\big|_{\vartheta_{ij}=\vartheta_{(ij)}},$$

причем $\sigma(\vartheta_{ij})$ — априорная плотность j-го компонента вектора $\vec{\vartheta}_i$.

Для вычисления оценки (8) необходима условная плотность $F(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)$. Вместе с тем на основании измерений (2) находится условная плотность $L(\vec{V}/\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_n)$. Переход к функции $F(\cdot)$ осуществляется заменой произвольного компонента ϑ_{ij} в выражении $L(\cdot)$ порядковой статистикой $\vartheta_{(qj)}$, но правило соответствующей замены неизвестно. С целью установления этого правила рассмотрим все возможные взаимные расположения векторов $\vec{\vartheta}_i (i=\overline{1, n})$ в области Г. Очевидно, эти расположения образуют

$$\mu = \prod_{i=1}^{n} i^{k-1}$$

конкретных ситуаций, для каждой из которых легко устанавливается связь между компонентами векторов $\vec{\vartheta}_i (i=\overline{1, n})$ и $\vec{A}_j (j=\overline{1, k})$ и соответствующее правило перехода от $L(\cdot)$ к $F(\cdot)$. Так, например, если $k=2$, $n=3$, то число возможных ситуаций равно 6 (рис. 1).

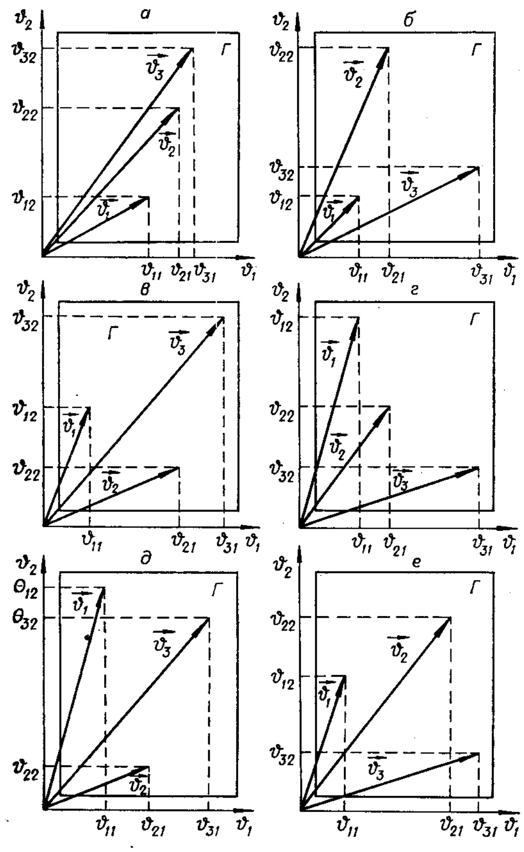

Рис. 1.

Обозначив в каждой ситуации один из векторов $\vec{\vartheta}_1$, второй $\vec{\vartheta}_2$, третий $\vec{\vartheta}_3$ (правило нумерации не имеет значения), найдем связь с порядковыми статистиками, имеющую для случая *а* вид

$\vartheta_{11} = \vartheta_{(11)}$, $\vartheta_{21} = \vartheta_{(21)}$, $\vartheta_{31} = \vartheta_{(31)}$,
$\vartheta_{12} = \vartheta_{(12)}$, $\vartheta_{22} = \vartheta_{(22)}$, $\vartheta_{32} = \vartheta_{(32)}$;

для случая *б*

$\vartheta_{11} = \vartheta_{(11)}$, $\vartheta_{21} = \vartheta_{(21)}$, $\vartheta_{31} = \vartheta_{(31)}$,
$\vartheta_{12} = \vartheta_{(12)}$, $\vartheta_{22} = \vartheta_{(32)}$, $\vartheta_{32} = \vartheta_{(22)}$;

для случая *в*

$\vartheta_{11} = \vartheta_{(11)}$, $\vartheta_{21} = \vartheta_{(21)}$, $\vartheta_{31} = \vartheta_{(31)}$,
$\vartheta_{12} = \vartheta_{(22)}$, $\vartheta_{22} = \vartheta_{(12)}$, $\vartheta_{32} = \vartheta_{(32)}$

и т. д.

Установив связь между векторами $\vec{\vartheta}_i (i=\overline{1, n})$ и $\vec{A}_j$ $(j=\overline{1, k})$ для всех μ ситуаций возможного расположения векторов $\vec{\vartheta}_i$, составим μ функций правдоподобия $\vec{F}_\nu(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)$ $(\nu=\overline{1, \mu})$, в терминах порядковых статистик отражающих каждую из μ ситуаций. Для получения функции F_ν достаточно в выражении $L(\vec{V}/\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_n)$ заменить компоненты векторов $\vec{\vartheta}_i(i=\overline{1, n})$ компонентами векторов $\vec{A}_j(j=\overline{1, k})$ в соответствии с установленной для ν-й ситуации связью между этими компонентами.

Для вычисления оценки $\hat{\vec{A}}_j$ по формуле (8) из всех μ функций правдоподобия $F_\nu(\cdot)$ следует использовать лишь одну, в некотором смысле наилучшим образом соответствующую апостериорному вектору измерений $\vec{V}$. С целью выявления этой функции осредним все μ функций $F_\nu(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)$ $(\nu=\overline{1, \mu})$ по пространствам порядковых статистик и условимся считать наилучшим образом соответствующей вектору $\vec{V}$ ту из них, среднее значение которой окажется наибольшим. Таким образом, вычисляем

$$\overline{F}_\nu(\vec{V}) = \int\limits_Q \overline{F}_\nu(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)\,\sigma(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)\,d\vec{A}_1 \ldots d\vec{A}_k \quad (\nu=\overline{1, \mu}); \quad (10)$$

$$\overline{F}_{j_q}(\vec{V}) = \max_\nu\left\{\overline{F}_\nu(\vec{V}),\ \nu = \overline{1, \mu}\right\}. \quad (11)$$

При этом оценка (8) приобретает вид

$$\hat{\vec{A}}_j = \frac{\int\limits_Q \vec{A}_j\sigma(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)\,F_q(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_k)\,d\vec{A}_1 d\vec{A}_2 \ldots d\vec{A}_k}{\overline{F}_q}. \quad (12)$$

Многомерное интегрирование, осуществляемое в соответствии с (10), (12), вызывает известные затруднения. Однако, полагая обязательным наличие в составе современных систем сбора и обработки данных ЦВМ, эти операции могут быть свободно реализованы, например, в рамках метода Монте-Карло.

Вычисление оценок (12) завершает решение задачи. Переход к искомым оценкам $\hat{\vec{\vartheta}}_1, \hat{\vec{\vartheta}}_2, \ldots, \hat{\vec{\vartheta}}_n$ лишен каких-либо затруднений, так как он осуществляется на основании ранее установленной для q-й ситуации расположения векторов $\vec{\vartheta}_i(i=\overline{1, n})$ связи этих векторов с компонентами порядковых статистик $\vec{A}_j(j=\overline{1, k})$.

Экспериментальное исследование алгоритма. При экспериментальном исследовании алгортма проводились оценки двух неизвестных векторов $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2$, размерность которых принималась равной 2. Характеристика j-го измерителя описывалась при этом функцией

$$f_j(\vec{\vartheta}_i) = u\left|\frac{\sin(\vartheta_{i1} - q_{j1})}{\vartheta_{i1} - q_{j1}}\right|\left|\frac{\sin(\vartheta_{i2} - q_{j2})}{\vartheta_{i2} - q_{j2}}\right| \quad (i=1, 2;\ j=\overline{1, 16}), \quad (13)$$

где $\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2}$ — составляющие i-го оцениваемого вектора, причем $0 \leqslant \vartheta_{i1}, \vartheta_{i2} \leqslant 2\pi$; q_{j1}, q_{j2} — известные параметры, характеризующие j-й измеритель.

С учетом выражений (1), (13) и в предположении $\vec{P} \in N(0, \vec{E})$ ($\vec{E}$ — единичная матрица) функцию правдоподобия можно записать в виде

$$L(\vec{V}/\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2) = \text{const}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{16}\left[v_j - u\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{\sin(\vartheta_{i1} - q_{j1})}{\vartheta_{i1} - q_{j1}}\right|\left|\frac{\sin(\vartheta_{i2} - q_{j2})}{\vartheta_{i2} - q_{j2}}\right|\right]^2\right\}. \quad (14)$$

Согласно (8) векторы порядковых статистик запишутся в виде

$$\vec{A}_1 = (\vartheta_{(11)}, \vartheta_{(21)}),$$

$$\vec{A}_2 = (\vartheta_{(12)}, \vartheta_{(22)}).$$

Совместная плотность вероятности порядковых статистик в этом случае будет равна

$$\sigma(\vec{A}_1, \vec{A}_2) = \sigma(\vec{A}_1)\sigma(\vec{A}_2) = \begin{cases} \frac{4}{(2\pi)^4} & \text{при } 0 \leqslant \vartheta_{(11)} < \vartheta_{(21)} \leqslant 2\pi, \\ & \quad 0 \leqslant \vartheta_{(12)} < \vartheta_{(22)} \leqslant 2\pi, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{15}$$

Число μ возможных ситуаций взаимного расположения векторов $\vec{\vartheta}_1$, $\vec{\vartheta}_2$ на плоскости равно двум. Условные плотности вероятностей измерений $\vec{V}$ в терминах порядковых статистик, записанные для каждой ситуации, принимают вид

$$F_1(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2) = \mathrm{const}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{16}\left[v_j - u\left|\frac{\sin(\vartheta_{(11)} - q_{j1})}{\vartheta_{(11)} - q_{j1}}\right|\left|\frac{\sin(\vartheta_{(12)} - q_{j2})}{\vartheta_{(12)} - q_{j2}}\right| - \right.\right.$$
$$\left.\left. - u\left|\frac{\sin(\vartheta_{(21)} - q_{j1})}{\vartheta_{(21)} - q_{j1}}\right|\left|\frac{\sin(\vartheta_{(22)} - q_{j2})}{\vartheta_{(22)} - q_{j2}}\right|\right]^2\right\}; \tag{16}$$

$$F_2(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2) = \mathrm{const}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{16}\left[v_j - u\left|\frac{\sin(\vartheta_{(21)} - q_{j1})}{\vartheta_{(21)} - q_{j1}}\right| \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\left|\frac{\sin(\vartheta_{(12)} - q_{j2})}{\vartheta_{(12)} - q_{j2}}\right| - u\left|\frac{\sin(\vartheta_{(11)} - q_{j1})}{\vartheta_{(11)} - q_{j1}}\right|\left|\frac{\sin(\vartheta_{(22)} - q_{j2})}{\vartheta_{(22)} - q_{j2}}\right|\right]^2\right\}. \tag{17}$$

Средние значения $\overline{F}_1(\vec{V})$ и $\overline{F}_2(\vec{V})$ по порядковым статистикам согласно (10) и с учетом (15), (16), (17) запишутся в виде

$$\overline{F}_1(\vec{V}) = \frac{4}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi} d\vartheta_{(11)} \int_{\vartheta_{(11)}}^{2\pi} d\vartheta_{(12)} \int_0^{2\pi} d\vartheta_{(21)} \int_{\vartheta_{(21)}}^{2\pi} d\vartheta_{(22)} F_1(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2);$$

$$\overline{F}_2(\vec{V}) = \frac{4}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi} d\vartheta_{(11)} \int_{\vartheta_{(11)}}^{2\pi} d\vartheta_{(12)} \int_0^{2\pi} d\vartheta_{(21)} \int_{\vartheta_{(21)}}^{2\pi} d\vartheta_{(22)} F_2(\vec{V}/\vec{A}_1, \vec{A}_2).$$

При вычислении оценок по формуле (12) используем ту из функций правдоподобия F_1 или F_2, которая соответствует наибольшему среднему из $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$.

Имея сведения о взаимном расположении оцениваемых векторов и зная оценки векторов порядковых статистик, находим оценки векторов $\vec{\vartheta}_1$, $\vec{\vartheta}_2$.

Моделирование проводилось на ЭЦВМ БЭСМ-6. Величина u принимала последовательно значения 3, 5, 7, 9. Число испытаний при вычислении интегралов по методу Монте-Карло принималось равным 1000. Результаты моделирования представлены в таблице и на рис. 2.

В таблице $\bar{\hat{\vartheta}}_{11}$, $\bar{\hat{\vartheta}}_{12}$, $\bar{\hat{\vartheta}}_{21}$, $\bar{\hat{\vartheta}}_{22}$ обозначены осредненные по ста реализациям оценки параметров ϑ_{11}, ϑ_{12}, ϑ_{21}, ϑ_{22}.

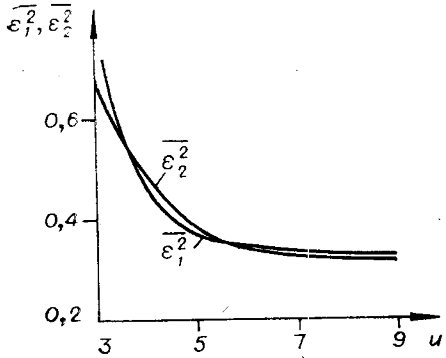

Рис. 2.

u	$\hat{\vartheta}_{11}$	$\hat{\vartheta}_{12}$	$\hat{\vartheta}_{21}$	$\hat{\vartheta}_{22}$	$\overline{\varepsilon_1^2}$	$\overline{\varepsilon_2^2}$
3	4,67	1,66	1,51	4,75	0,7	0,64
5	4,71	1,56	1,56	4,72	0,36	0,38
7	4,74	1,57	1,58	4,78	0,34	0,33
9	4,70	1,59	1,50	4,79	0,33	0,33

Средние квадраты ошибок $\overline{\varepsilon_1^2}$, $\overline{\varepsilon_2^2}$ вычислялись по формулам

$$\overline{\varepsilon_j^2} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\|\vec{\vartheta}_i - \hat{\vec{\vartheta}}_{ji}\|^2 \quad (j=1, 2),$$

где $\hat{\vec{\vartheta}}_{ji}$ — оценка вектора $\vec{\vartheta}_j$ в i-м эксперименте. Истинные значения параметров при моделировании принимались равными

$$\vartheta_{11}=4{,}71;\ \vartheta_{12}=1{,}57;\ \vartheta_{21}=1{,}57;\ \vartheta_{22}=4{,}71.$$

Во всех экспериментах идентификация взаимного расположения векторов $\vec{\vartheta}_1$, $\vec{\vartheta}_2$, проводимая по величинам $\bar{F}_1(\vec{V})$, $\bar{F}_2(\vec{V})$, осуществлялась безошибочно.

ВЫВОДЫ

Тождественность структуры векторов данных об оцениваемых параметрах $\vec{f}(\vec{\vartheta}_i)$ $(i=\overline{1,\ n})$ приводит к совпадению оценок, найденных в рамках классических методов оценивания неизвестных параметров. Предлагаемый метод основан на переходе к оцениванию порядковых статистик, сформированных на базе исходных векторов $\vec{\vartheta}_i(i=\overline{1,\ n})$, с последующим возвращением к искомым оценкам. Оценивание порядковых статистик осуществляется на основании (12) с предварительным вычислением (9), (10), (11). Алгоритм ориентирован на использование ЦВМ, присутствующих в современных автоматизированных системах обработки данных. Моделирование алгоритма подтверждает его эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ван Трис. Теория обнаружения, оценки и модуляции. М., «Советское радио», 1972.
2. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
3. Введение в теорию порядковых статистик. М., «Статистика», 1970.
4. С. Карлин. Основы теории случайных процессов. М., «Мир», 1971.
5. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи. Т. II. М., «Советское радио», 1962.

Поступила в редакцию 14 мая 1974 г.;
окончательный вариант — 5 августа 1974 г.