необходимо удвоить степень a и индексы моментов. Границы применимости формул $P_l(a)$ при этом определяются как $\sqrt{a_l}$ и $\sqrt{a_{l+1}}$.

Заметим, что если заданы моменты (7) и $n=2$, то оценка сверху для $P(|x|>a)$ при $C_0=1$ и $C_1=0$ совпадает с неравенством Чебышева.

Поступило в редакцию 16 июля 1974 г.

УДК 681.883.519.2

В. И. БОРЩЕВИЧ

(Кишинев)

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОМЕРНЫХ И УСЛОВНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Большинство известных в настоящее время статистических методов анализа амплитудных распределений [1] требует большого объема априорной информации об исследуемом процессе. Это связано с тем, что начальные условия (например, уровни квантования) задаются оптимальным в некотором смысле образом только при наличии ряда предварительных сведений о характере распределения вероятностей данного процесса. Поэтому для тех случаев, когда получение таких сведений затруднительно, желательно синтезировать методы, способные адаптироваться к произвольным законам распределения. Это означает, что алгоритмы таких методов должны использовать получаемую в ходе эксперимента информацию для автоматической установки уровней, оптимальных с той или иной точки зрения. Кроме того, очевидно, что значения этих уровней уже сами по себе будут характеризовать исследуемое распределение.

Рассмотрим один из возможных путей решения поставленной задачи. Пусть имеется априорно неизвестный закон распределения $F(x)$, заданный на интервале исследуемых значений аргумента $[a, b]$. Сначала определяем среднее значение μ_1 (для простоты вместо оценок пока будем говорить о точных значениях), на втором этапе разбиваем интервал $[a, b]$ на два непересекающихся интервала $[a, \mu_1]$ и $[\mu_1 b]$, на которых определяем средние значения μ_{10}, μ_{11} (индексы записываются в двоичной системе счисления), на третьем этапе, используя предыдущие числовые значения, разбиваем $[a, b]$ на интервалы $[a, \mu_{10})$, $[\mu_{10}, \mu_1)$, $[\mu_1, \mu_{11})$ и $[\mu_{11}, b]$, где соответственно находим μ_{100}, μ_{101}, μ_{110}, μ_{111} и т. д.

Назовем совокупности чисел, получаемых на каждом этапе, группами и отметим, что количество цифр в двоичном индексе i соответствует порядковому номеру группы, к которой принадлежит данное число μ_i, а количество таких чисел в m-й группе равно 2^{m-1}. Аналитически через интеграл Стильтьеса

$$\mu_i = \frac{1}{P_i} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} x dF(x), \tag{1}$$

где P_i — вероятность $P\{x \in [\alpha_i, \beta_i)\}$; $[\alpha_i, \beta_i)$ — интервал, на котором определяется данное число μ_i.

Оценки $\{\mu_i^*\}$ для сигналов, представленных в дискретной форме, удобно получить с помощью рекуррентного алгоритма вида

$$\mu_i[n] = \mu_i[n-1] + \gamma[n](x[n] - \mu_i[n-1]). \tag{2}$$

Здесь $x[n]$ — n-й по счету сигнал, поступающий на вход i-го канала при условии, что

$$\alpha_i^* \leqslant x[n] < \beta_i^*, \tag{3}$$

где α_i^*, β_i^* — текущие оценки нижнего и верхнего порогов дискриминации. Такой алгоритм [2] обеспечивает сходимость $[\mu_i^*]$ к $[\mu_i]$ в среднеквадратичном, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma[n] = \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] < \infty. \tag{4}$$

Блок-схема соответствующего устройства представлена на рис. 1, где $Д_i$ — двухпороговый дискриминатор, μ_i^* — блок рекуррентного оценивания.

Характерной особенностью изложенного метода является то, что для получения чисел высших групп используются числа низших групп, а значения самих чисел зависят исключительно от исследуемого закона распределения $F(x)$. При самых общих ограничениях на функцию распределения можно показать, что решение уравнения (1) будет естественным, а также то, что система чисел $\{\mu_i\}$ линейна относительно операций сдвига и масштаба, т. е. если

$$x'=a+bx, \qquad (5)$$

тогда $\mu_i'=a+b\mu_i$, где a, b — действительные числа.

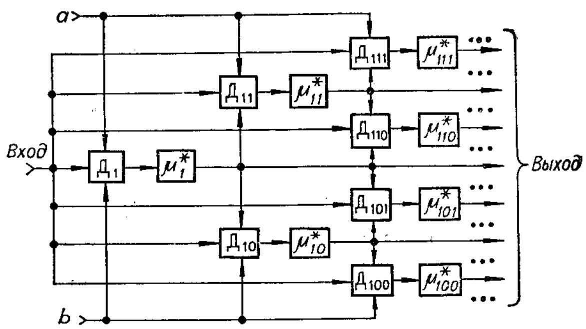

Рис. 1.

Используя аналогию между плотностью распределения вероятностей $dF(x)/dx$ и распределением положительных масс вдоль идеального стержня, получаем уравнения

$$P_1=P_{10}+P_{11};\ P_{10}=P_{100}+P_{101};$$
$$P_{11}=P_{110}+P_{111},\ldots; \qquad (6)$$

$$P_{10}(\mu_1-\mu_{10})=P_{11}(\mu_{11}-\mu_1);\ P_{100}(\mu_{10}-\mu_{100})=P_{101}(\mu_{101}-\mu_{10});$$
$$P_{110}(\mu_{11}-\mu_{110})=P_{111}(\mu_{111}-\mu_{11}),\ldots, \qquad (7)$$

из которых следует, что вероятности $\{P_i\}$ полностью определяются через систему чисел $\{\mu_i\}$. Сами числа плотно укладываются на интервале $[a, b]$ (за исключением областей, где $dF(x)=0$), т. е.

$$\lim_{i\to\infty}(\beta_i-\alpha_i)=0. \qquad (8)$$

Последнее вытекает из строгого неравенства

$$\alpha_i<\mu_i<\beta_i, \qquad (9)$$

в котором нетрудно убедиться, рассмотрев уравнение (1). Используя выражения (1), (6) — (8), получаем

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{2^{m-1}}^{2^m-1}\frac{P_i}{\beta_i-\alpha_i}\varphi_i(x)=\frac{dF(x)}{dx}=p(x), \qquad (10)$$

где m — номер наивысшей группы (при $i\to\infty$, $m\to\infty$);

$$\varphi_i(x)\begin{cases}1, & x\in[\alpha_i, \beta_i);\\ 0, & x\overline{\in}[\alpha_i, \beta_i)\end{cases} \qquad (11)$$

— кусочно-постоянная функция.

Таким образом, из (1) и (10) следует, что между системой $\{\mu_i\}$ и функцией $F(x)$ существует взаимно-однозначное соответствие.

Одно из интересных свойств предложенной системы состоит в том, что ее числа раскладываются на исследуемом интервале $[a, b]$, тяготея к областям, где концентрируется основная масса распределения (см. примеры на рис. 2, *а*, *б*). При построении гистограмм вида

$$p^*(x)=\sum_{2^{m-1}}^{2^m-1}\frac{P_i}{\beta_i-\alpha_i}\varphi_i(x) \qquad (12)$$

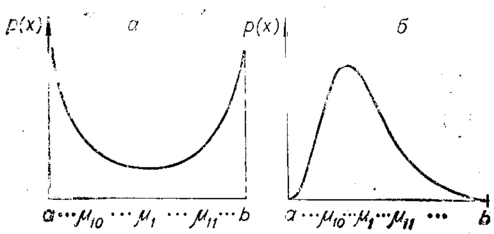

Рис. 2.

это позволит получить выигрыш в точности аппроксимации плотности распределения вероятностей $p(x)$ в указанных областях.

Полезно отметить, что числа системы $\{\mu_i\}$ сами по себе характеризуют исследуемое распределение. Например, известно [1], что с помощью функционала

$$Q=\int_a^b|x-m|\,dF(x) \qquad (13)$$

можно оценивать среднеквадратичное отклонение по формуле

$$\sigma = kQ, \tag{14}$$

где k — константа, зависящая только от закона распределения. Можно показать, что

$$Q = 0{,}5[s(\mu_{11}-\mu_1)+(1-s)(\mu_1-\mu_{10})], \tag{15}$$

где

$$s = \int\limits_{\mu_1}^{b} dF(x) \tag{16}$$

—константа, имеющая тот же характер, что и k. Кроме того, величина

$$\log[(\mu_{11}-\mu_1)(\mu_1-\mu_{10})^{-1}] \tag{17}$$

может служить мерой асимметрии для широкого класса распределений.

Используя свойства взаимной однозначности и линейности (5), можно применять систему чисел $\{\mu_i\}$ для распознавания законов распределения.

Располагая числами $\{\mu_i\}$ и сведениями в виде закона распределения можно определить его параметры $\{\theta_i\}$, относительно которых нужно решить систему уравнений вида

$$\mu_i = \frac{1}{p_i}\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} x dF(x, \Theta_1, \Theta_2, \ldots). \tag{18}$$

В заключение следует отметить, что в выражении (2) удобно принять $\gamma[n] = \text{const}$ [3], что максимально упрощает вычисление текущих оценок $\{\mu_i^*\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Мирский. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов М., «Энергия», 1972.
2. Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.
3. А. Г. Сенин. К оценке среднего значения случайной величины рекуррентным алгоритмом с постоянным шагом.— Автометрия, 1972, № 2.

Поступило в редакцию 14 октября 1974 г.

УДК 681.325.3

С. С. ВАНДЕР, Ю. Д. ДОЛИНСКИЙ, К. К. ПОЛЯКОВ

(Ленинград)

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ЧАСТОТА — КОД

Повышение точности преобразования частоты в код путем подсчета числа периодов преобразуемой частоты за фиксированный временной интервал достигается обычно умножением преобразуемой частоты, что при большом коэффициенте умножения и широком диапазоне частот является сложной технической задачей [1, 2].

В статье исследуется уравнение работы преобразователя частота — код, в котором высокая точность преобразования достигается без умножения частоты. Описаны блок-схемы, иллюстрирующие возможность реализации исследуемого уравнения.

Решая очевидное тождество

$$f = \frac{1}{\tau}(N + tf)$$

относительно частоты, получаем

$$f = \frac{N}{\tau}\,\frac{1}{1-\frac{t}{\tau}}, \tag{1}$$

где f — преобразуемая частота; N — максимальное количество целых периодов преобразуемой частоты, укладывающихся в фиксированном временном интервале τ; $t = \tau - \frac{N}{f}$.