или

$$L_n(t-\tau)=\sum_{k=0}^{n} L_{n-k}(t)\sum_{i=0}^{k} A_{ki}L_i(\tau), \tag{21}$$

где

$$A_{ki}=(-1)^i\,2^{k-i-1}C_k^i\,\frac{k+i}{k}.$$

Приложение 2

Выражение для среднего по времени и множеству квадрата ошибки фильтра может быть записано следующим образом:

$$\left[\overline{\widetilde{X(t)-h(t)}}\right]=\left[\int\limits_0^\infty \overline{\widetilde{y(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau-h(t)}}\right]^2=$$

$$=\iint\limits_0^\infty \overline{\widetilde{y(t-\tau)\,y(t-\lambda)}}\,k(\tau)\,k(\lambda)\,d\tau d\lambda-2\int\limits_0^\infty \overline{\widetilde{y(t-\tau)\,h(t)}}\,k(\tau)\,d\tau+\overline{\widetilde{h}}^2(t), \tag{22}$$

где $X(t)=\int\limits_0^\infty y(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau$ — выходная функция фильтра.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Перов. Статистический синтез импульсных систем. М. «Советское радио», 1959.
2. В. П. Перов. Оптимальная фильтрация периодических процессов.— Известия АН СССР. Сер. техническая кибернетика, 1973, № 3.
3. Д. Джексон. Ряды Фурье и его ортогональные полиномы. М., Изд-во иностран. лит., 1948.
4. А. Г. Ивахненко, В. Г. Лапа. Кибернетические предсказывающие устройства. Киев, «Техника», 1965.
5. Э. И. Цветков. Нестационарные случайные процессы и их анализ. М., «Энергия», 1973.
6. В. И. Куля. Ортогональные фильтры. Киев, «Техника», 1967.

Поступило в редакцию 11 марта 1974 г.

УДК 621.317 : 519.21

М. Г. ЗОТОВ, В. Г. ТРЕТЬЯКОВ, Ю. В. ФЕДЮКИН

(*Москва*)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Оптимальные передаточные функции систем с конечной «памятью» обладают двумя особенностями: содержат в своем составе дельта-функции и их производные, а также звенья чистого запаздывания.

Дельта-функции и их производные можно исключить из состава передаточных функций, используя методы регуляризации [1] или принцип минимальной сложности [2].

Использование звеньев чистого запаздывания в системах управления сопряжено с известными трудностями. Для исключения из состава передаточных функций звеньев чистого запаздывания в основном применяются два метода [3].

Первый метод основан на построении логарифмических частотных характеристик с последующей аппроксимацией их дробно-рациональными функциями.

Второй метод позволяет решить ту же задачу, не прибегая к графическим построениям, для чего передаточная функция звена чистого запаздывания разлагается в ряд Пада [3]. Полученное таким образом дробно-рациональное выражение употребляется вместо звена чистого запаздывания.

ω_{cp} \ τ (n=1)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0,1										
0,2							0,6	0,6	0,6	0,6
0,3					0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9
0,4				0,6	0,6	0,7	0,9	1,0	1,1	1,1
0,6			0,6	0,7	0,9	1,1	1,0	0,9	0,9	0,9
0,8		0,6	0,7	1,0	1,1	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0
1,0		0,6	0,9	1,1	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0
1,5	0,6	0,9	1,0	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
2,0	0,6	1,1	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
2,5	0,8	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
3,0	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1
3,5	1,1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,5	1,0
4,0	1,1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,5	0,9	0,9

ω_{cp} \ τ (n=2)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0,1										
0,2										
0,3							0,5	0,5	0,5	0,5
0,4						0,5	0,5	0,5	0,6	0,6
0,6				0,5	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7
0,8			0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
1,0			0,5	0,6	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,7
1,5		0,5	0,7	0,7	0,7	0,8	0,7	0,8	0,8	0,8
2,0		0,6	0,7	0,8	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
2,5	0,5	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
3,0	0,5	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,7
3,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,5	1,4
4,0	0,6	0,8	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6	1,2	1,1

ω_{cp} \ τ (n=3)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0,1										
0,2										
0,3										
0,4										
0,6								0,6	0,6	0,6
0,8						0,6	0,6	0,7	0,7	0,6
1,0					0,6	0,6	0,7	0,6	0,7	0,7
1,5			0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
2,0			0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
2,5		0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
3,0		0,5	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8
3,5		0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	0,7
4,0		0,6	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	0,6	0,7

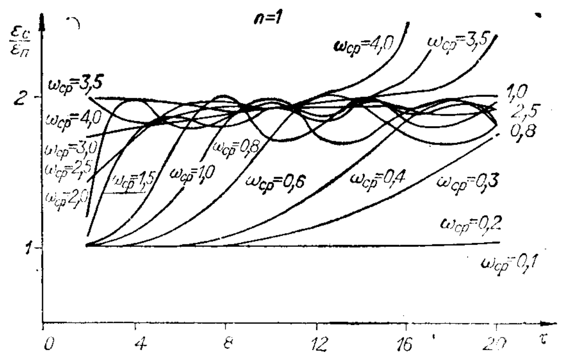

Рис. 1.

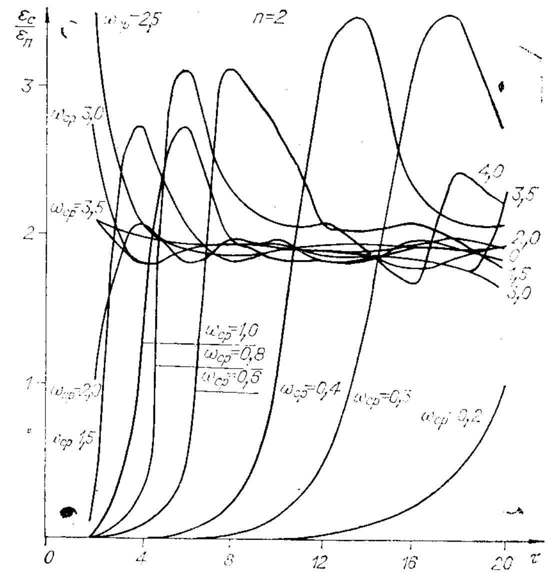

Рис. 2.

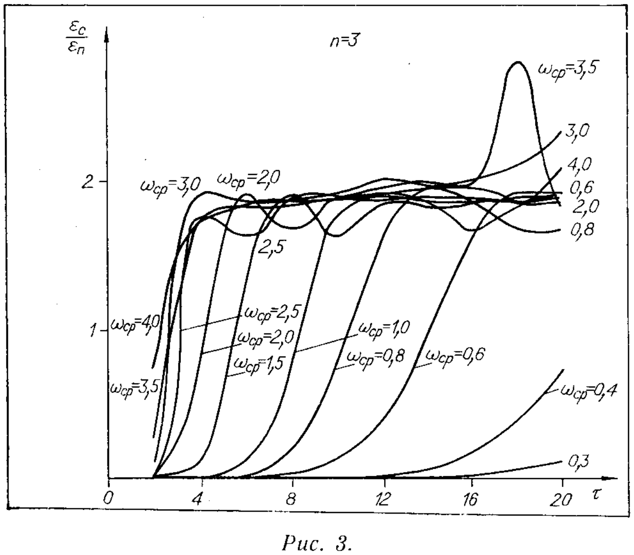

Рис. 3.

Возможен другой способ разложения передаточной функции звена чистого запаздывания, отличающийся тем, что параметры дробно-рациональной функции зависят от некоторого параметра a, величина которого выбирается оптимальным образом.

Предлагаемое разложение обеспечивает лучшее приближение дробно-рациональных функций к звену чистого запаздывания, чем ряд Пада. Запишем передаточную функцию звена чистого запаздывания в следующем виде:

$$e^{-p\tau} = \frac{e^{-p(1-a)\tau}}{e^{pa\tau}}. \tag{1}$$

Разложим числитель и знаменатель (1) в степенной ряд:

$$e^{-p\tau} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{(1-a)^i \tau^i}{i!} p^i}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(a\tau)^i}{i!} p^i}. \tag{2}$$

Ограниченное число (n) членов ряда (2) можно использовать в качестве приближения к передаточной функции звена чистого запаздывания. Оптимальное значение параметра a определяется из минимума оценки аппроксимации, величина которой обусловливается формулой

$$\varepsilon_{\text{п}}^2 = \int_{-\omega_{\text{ср}}}^{\omega_{\text{ср}}} \left| e^{-j\omega\tau} - \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{(1-a)^i \tau^i}{i!} j\omega^i}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(a\tau)^i}{i!} j\omega^i} \right|^2 d\omega, \tag{3}$$

где $\omega_{\text{ср}}$ — частота среза. В таблице приведены значения $a_{\text{опт}}$ для различных величин запаздывания τ и частот среза $\omega_{\text{ср}}$ при аппроксимации передаточной функции звена чистого запаздывания дробно-рациональной функцией первого, второго и третьего порядков ($n=1, 2, 3$).

Естественно сравнить ошибку аппроксимации передаточной функции звена чистого запаздывания рядом Пада, определяемую формулой (4), с ошибкой ε_{c}^2:

$$\varepsilon_{\text{c}}^2 = \int_{-\omega_{\text{ср}}}^{\omega_{\text{ср}}} \left| e^{-j\omega\tau} - W_{\text{c}}(j\omega) \right|^2 d\omega, \tag{4}$$

где $W_{\text{c}}(j\omega)$ — разложение передаточной функции звена чистого запаздывания в ряд Пада.

На рис. 1, 2, 3 приведены графики зависимости $\varepsilon_{\text{c}}^2/\varepsilon_{\text{п}}^2$ при различных временах запаздывания τ и частотах среза $\omega_{\text{ср}}$ для $n=1, 2, 3$.

Из графиков видно, что существует области соотношений τ и $\omega_{\text{ср}}$, где предлагаемая аппроксимация лучше в среднем в два раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О методах регуляризации задач оптимального управления.— Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 4.
2. В. В. Солодовников. Принцип минимальной сложности и его применение для регуляризации задач оптимального стохастического управления.— ИВУЗ. Сер. приборостроение, 1970, № 3.
3. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.

Поступило в редакцию 9 апреля 1973 г.