АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 1 1975

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 62-50

В. П. ПЕРОВ, М. Б. СОЛОДОВНИЧЕНКО
(Ленинград)

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФИЛЬТРАМИ

Предположим, что входные процессы в общем случае нестационарны и требуется найти оптимальный стационарный (с постоянными параметрами) фильтр. Для отыскания оптимальных стационарных фильтров при нестационарных входных воздействиях можно использовать критерий минимума среднего по времени и по множеству квадрата ошибки [1]. Уравнение для оптимальной весовой функции при использовании такого критерия имеет вид [1]

$$\int\limits_{T_a}^{T_в} \widetilde{\overline{y(t-\tau)\, y(t-\lambda)}}\, k(\tau)\, d\tau = \widetilde{\overline{hs(t)\, y(t-\lambda)}}, \tag{1}$$

где $y(t)$ — входная функция фильтра, состоящая из сигнала и помехи; $s(t)$ — сигнал, т. е. полезная функция, поступающая на вход фильтра и воспроизводимая либо линейно преобразуемая им; h — оператор требуемого линейного преобразования; прямая черта в условии (1) означает усреднение по множеству, а волнистая — по времени; $(T_в - T_a)$ — память фильтра.

Для решения интегрального уравнения (1) можно использовать представление входной функции в ряд Фурье по ортогональным базисным функциям [2]. В этом случае принимаем

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} y_n \eta_n(t), \tag{2}$$

где $(N+1)$ — число учитываемых членов разложения; y_n — коэффициенты Фурье (спектр), определяемые равенством [3]

$$y_n = \int\limits_{T_a}^{T_в} y(t)\, \eta_n(t)\, \omega(t)\, dt, \tag{3}$$

которое вытекает из (2) при учете условия ортогональности

$$\int\limits_{T_a}^{T_в} \eta_n(t)\, \eta_m(t)\, \omega(t)\, dt = \delta_{nm}. \tag{4}$$

Здесь $\delta_{nm}=1$ при $n=m$, $\delta_{nm}=0$ при $n \neq m$.

В соответствии с (2)

$$y(t-\tau) = \sum_{n=0}^{N} y_n \eta_n(t-\tau); \qquad hs(t) = h(t) = \sum_{n=0}^{N} h_n \eta_n(t). \tag{5}$$

На основании (4), (5) и (20), применяя операцию усреднения по времени с весом $\omega(t)$ [4, 5], получим

$$\widetilde{\overline{y(t-\tau)\, y(t-\lambda)}} = \int\limits_{T_a}^{T_в} \overline{y(t-\tau)\, y(t-\lambda)}\, \omega(t)\, dt =$$

$$= \int_{T_a}^{T_в} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \overline{y_n y_m} \eta_n (t-\tau) \eta_m (t-\lambda) \omega (t) dt =$$

$$= \int_{T_a}^{T_в} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \overline{y_n y_m} \sum_{k,i=0}^{n} A_{nki} \eta_k (t) \eta_i (\tau) \sum_{\nu, j=0}^{m} A_{m\nu j} \eta_\nu (t) \eta_j (\lambda) \omega (t) dt \quad (6)$$

или

$$\widetilde{\overline{y (t-\tau) y (t-\lambda)}} = \sum_{m=0}^{N} \overline{y_m^2} \sum_{\nu=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{m} A_{m\nu i} \eta_i (\tau) \sum_{j=0}^{m} A_{m\nu j} \eta_j (\lambda) \right]. \quad (7)$$

Аналогично

$$\widetilde{\overline{h (t) y (t-\lambda)}} = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\nu=0}^{m} \overline{y_m h_\nu} \sum_{j=0}^{m} A_{m\nu j} \eta_j (\lambda). \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (1), имеем

$$\sum_{m=0}^{N} \overline{y_m^2} \sum_{\nu=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{m} A_{m\nu i} k_i \sum_{j=0}^{m} A_{m\nu j} \eta_j (\lambda) \right] = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\nu=0}^{m} \overline{y_m h_\nu} \sum_{j=0}^{m} A_{m\nu j} \eta_j (\lambda), \quad (9)$$

где

$$k_i = \int_{T_a}^{T_в} k (\tau) \eta_i (\tau) d\tau, \quad (10)$$

т. е. k_i — спектр функции $k(\tau)\omega^{-1}(\tau)$. Согласно (2) и (10),

$$k = (\tau) = \omega (\tau) \sum_{n=0}^{N} k_n \eta_n (\tau). \quad (11)$$

Таким образом, для определения оптимальной весовой функции достаточно найти k_n, удовлетворяющие (9). Умножая левую и правую части уравнения (9) на $\eta_r(\lambda)\omega(\lambda)$ и интегрируя по λ в пределах $T_а$, $T_в$ с учетом условия (4), получим вместо (9) систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{N} \overline{y_m^2} \sum_{\nu=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{m} A_{m\nu i} k_i A_{m\nu r} \right] = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\nu=0}^{m} \overline{y_m h_\nu} A_{m\nu r} \; (r = 0, 1, \ldots, N), \quad (12)$$

из которой и определяется k_m.

Для иллюстрации рассмотрим решение задачи при использовании в качестве базисных функций нормированных полиномов Лагерра $L_n(t)$. При этом (см. приложение) $\eta(t) = L_n(t)$, $A_{m\nu i} = A_{\nu, i} = (-1)^i 2^{\nu-i-1} C_\nu^i \frac{\nu+i}{\nu}$, $\omega(t) = e^{-t}$, $T_а = 0$, $T_в = \infty$. Тогда система уравнений (12) принимает вид

$$\sum_{m=0}^{N} \overline{y_m^2} \sum_{\nu=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{\nu} A_{\nu,i} k_i A_{\nu,r} \right] = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\nu=0}^{m} \overline{y_m h_{m-\nu}} A_{\nu r}. \quad (13)$$

Решение системы уравнений (13) может быть записано в общем виде следующим образом:

$$k_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i [2 (1+i)^{m-1} - 1] \frac{\sum_{k=0}^{N-i} \overline{y_{k+i} h_k}}{\sum_{k=i}^{N} \overline{y_k^2}}. \quad (14)$$

Правильность решений (13) легко проверяется подстановкой его в исходную систему уравнений (12).

Во многих случаях, представляющих практический интерес, достаточно учитывать первые члены разложения, принимая $N \leqslant 3$. Для этих случаев на основании (14) или непосредственно из решения системы уравнений (13) имеем
при $N = 0$

$$k_0 = \frac{\overline{y_0 h_0}}{\overline{y_0^2}}; \quad (15)$$

при $N=1$

$$k_0=\frac{\overline{y_0h_0}+\overline{y_1h_1}}{\overline{y_0^2}+\overline{y_1^2}};\qquad k_1=k_0-\frac{\overline{y_1h_0}+\overline{y_2h_1}}{\overline{y_1^2}+\overline{y_2^2}};\tag{16}$$

при $N=2$

$$k_0=\frac{\overline{y_0h_0}+\overline{y_1h_1}+\overline{y_2h_2}}{\overline{y_0^2}+\overline{y_1^2}+\overline{y_2^2}};\qquad k_1=k_0-\frac{\overline{y_1h_0}+\overline{y_2h_1}}{\overline{y_1^2}+\overline{y_2^2}};$$

$$k_2=k_0-3\frac{\overline{y_1h_0}+\overline{y_2h_1}}{\overline{y_1^2}+\overline{y_2^2}}+\frac{\overline{y_2h_0}}{\overline{y_2^2}}.\tag{17}$$

Предположим, в частности, что помеха отсутствует $(y(t)=s(t))$, а сигнал, подлежащий воспроизведению $(h=1)$, задан суммой

$$s(t)=s_0L_0(t)+s_1L_1(t)+s_2L_2(t),$$

где s_0, s_1, s_2 — случайные коэффиценты, между собой некоррелированные. В этом случае

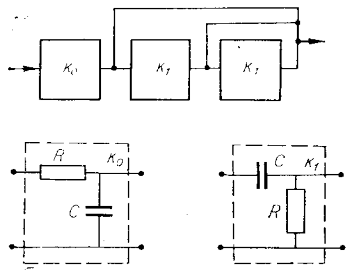
$$y_0=h_0=s_0;\qquad y_1=h_1=s_1;\qquad y_2=h_2=s_2,\tag{18}$$

и, согласно (16), $k_0=k_1=k_2=1$.

Соответственно с учетом (11) для весовой функции оптимального фильтра имеем

$$k(t)=e^{-t}\,[L_0(t)+L_1(t)+L_2(t)]=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\,[6-6t+t^2]\,.\tag{19}$$



Используя выражение (22), легко показать, что ошибка системы с такой весовой функцией при выполнении заданных условий (18) равна нулю. Весовая функция (19) просто реализуется с помощью комбинации ортогональных фильтров Лагерра [6] в виде структурной схемы, изображенной на рисунке.

Приложение 1

Различные системы ортогональных базисных функций допускают представление в виде

$$\eta_n(t-\tau)=\sum_{k,i=0}^{n}A_{nki}\eta_k(t)\,\eta_i(\tau).\tag{20}$$

В частности, используя общие выражения для нормированных полиномов Лагерра, можно записать:

$$L_0(t-\tau)=L_0(t)\,L_0(\tau);$$

$$L_1(t-\tau)=\sum_{k=0}^{1}L_{1-k}(t)\sum_{i=0}^{k}L_i(\tau)\,(-1)^i\,2^{k-i-1}C_k^i\,\frac{k+i}{k};$$

$$L_2(t-\tau)=\sum_{k=0}^{2}L_{2-k}(t)\sum_{i=0}^{k}L_i(\tau)\,(-1)^i\,2^{k-i-1}C_k^i\,\frac{k+i}{k};$$

. . . .

$$L_n(t-\tau)=\sum_{k=0}^{n}L_{n-k}(t)\sum_{i=0}^{k}L_i(\tau)\,(-1)^i\,2^{k-i-1}C_k^i\,\frac{k+i}{k}$$

или

$$L_n(t-\tau)=\sum_{k=0}^{n} L_{n-k}(t)\sum_{i=0}^{k} \mathrm{A}_{ki}L_i(\tau), \tag{21}$$

где

$$\mathrm{A}_{ki}=(-1)^i\,2^{k-i-1}C_k^i\,\frac{k+i}{k}.$$

Приложение 2

Выражение для среднего по времени и множеству квадрата ошибки фильтра может быть записано следующим образом:

$$\left[\widetilde{\overline{X(t)-h(t)}}\right]=\left[\int_0^\infty \widetilde{\overline{y(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau-h(t)}}\right]^2=$$

$$=\iint_0^\infty \widetilde{\overline{y(t-\tau)\,y(t-\lambda)}}\,k(\tau)\,k(\lambda)\,d\tau d\lambda-2\int_0^\infty \widetilde{\overline{y(t-\tau)\,h(t)}}\,k(\tau)\,d\tau+\widetilde{\overline{h}}^2(t), \tag{22}$$

где $X(t)=\int_0^\infty y(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau$ — выходная функция фильтра.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Перов. Статистический синтез импульсных систем. М. «Советское радио», 1959.
2. В. П. Перов. Оптимальная фильтрация периодических процессов.— Известия АН СССР. Сер. техническая кибернетика, 1973, № 3.
3. Д. Джексон. Ряды Фурье и его ортогональные полиномы. М., Изд-во иностран. лит., 1948.
4. А. Г. Ивахненко, В. Г. Лапа. Кибернетические предсказывающие устройства. Киев, «Техника», 1965.
5. Э. И. Цветков. Нестационарные случайные процессы и их анализ. М., «Энергия», 1973.
6. В. И. Куля. Ортогональные фильтры. Киев, «Техника», 1967.

Поступило в редакцию 11 марта 1974 г.

УДК 621.317 : 519.21

М. Г. ЗОТОВ, В. Г. ТРЕТЬЯКОВ, Ю. В. ФЕДЮКИН

(*Москва*)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Оптимальные передаточные функции систем с конечной «памятью» обладают двумя особенностями: содержат в своем составе дельта-функции и их производные, а также звенья чистого запаздывания.

Дельта-функции и их производные можно исключить из состава передаточных функций, используя методы регуляризации [1] или принцип минимальной сложности [2].

Использование звеньев чистого запаздывания в системах управления сопряжено с известными трудностями. Для исключения из состава передаточных функций звеньев чистого запаздывания в основном применяются два метода [3].

Первый метод основан на построении логарифмических частотных характеристик с последующей аппроксимацией их дробно-рациональными функциями.

Второй метод позволяет решить ту же задачу, не прибегая к графическим построениям, для чего передаточная функция звена чистого запаздывания разлагается в ряд Пада [3]. Полученное таким образом дробно-рациональное выражение употребляется вместо звена чистого запаздывания.