А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 1 1975

МЕТОДЫ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 517.52 : 621.391

С. С. ПОПОВ
(Ленинград)

ОЦЕНКИ ЭЛЕМЕНТОВ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША

Таблица N значений ограниченной функции однозначно представима полиномом по некоторой системе ортогональных функций, т. е. задание совокупности N коэффициентов полинома эквивалентно заданию самой таблицы, поскольку последняя всегда может быть вычислена по полиному. Интересен случай, когда часть коэффициентов равна нулю и таблица представима $q<N$ коэффициентами полинома. Для сокращенной записи таблицы можно усечь полином, т. е. отбросить часть членов, имеющих малую величину в узловых точках. Восстановленная по усеченному полиному таблица отличается от исходной.

Задачи оценки коэффициентов полинома и ошибок восстановления таблицы связаны и в общем случае достаточно сложны.

Для приближения таблиц полинома используют различные системы ортогональных функций: ортогональные многочлены, тригонометрические функции, функции Уолша и т. д. В настоящей работе получены оценки величины коэффициентов полиномов Уолша, или, что то же самое, элементов дискретного преобразования Уолша.

Интерес к преобразованию Уолша объясняется простотой алгоритмов прямого и обратного преобразований.

Дискретное преобразование Уолша каждой ограниченной последовательности $f(m)$ ставит в соответствие набор чисел:

$$a_k = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-1} f(m)\, w_k(m), \tag{1}$$

где $w_k(m)$ — дискретная функция Уолша, а m, $k=0, \ldots, 2^n-1$.

Удобно [1] функции Уолша диадно упорядочивать и применять двоичную форму записи номеров.

Всюду, где не возникает необходимость особо отмечать значение аргумента функции $w_k(m)$, будем записывать ее сокращенно w_k.

Порядком функции w_k называют [1] наибольший номер разряда, в котором двоичное число k имеет единицу. Рангом R функции w_k называют количество двоичных разрядов, в которых k имеет единицы. Эти же понятия относятся к элементам последовательности a_k. Элементы a_k с увеличением их порядка и ранга быстро убывают, если последовательность (1) достаточно «гладкая».

В [1, 2] для функций с ограниченной r-й производной получены оценки коэффициентов ряда Уолша, имеющих заданный порядок и ранг r.

Ниже доказывается следующее утверждение: если последовательность имеет ограниченную r-ю разность M_r, то для элементов a_k ранга $R \geqslant r$ справедлива оценка

$$|a_k| \leqslant 2^{r(n-1)-\sum\limits_{i=p}^{n} i\alpha_i} M_r, \tag{2}$$

где α_i — значение i-го разряда двоичного представления номера k, p — таково, что $\sum\limits_{i=p}^{n} \alpha_i = r$.

Построение оценки основано на известной формуле Абеля [3]

$$\sum_{m=1}^{N} x_m y_m = \sum_{m=1}^{N-1} X_m (y_m - y_{n+1}) + X_N y_N. \tag{3}$$

Здесь

$$X_m = \sum_{l=1}^{m} x_l.$$

Применение (3) к (1) дает

$$a_k = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-1} f(m)\, w_k(m) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-2} w_k^1(m)\, \Delta^1(m) + w_k^1(2^n-1)\, f(2^n-1), \tag{4}$$

где $w_k^1(m) = \sum\limits_{l=0}^{m} w_k(l)$, $\Delta^1(m) = f(m) - f(m+1)$.

Прежде чем переходить к общему выводу оценок, покажем, как их можно построить в частном случае, например при $n=4$.

Из таблицы видно, что

$$w_k^1(2^n-1) = 0, \tag{5}$$

если ранг w_k^1 отличен от нуля.

Все функции w_k^1 ранга, выше нулевого по величине порядка, можно разбить на n групп. Для функций w_k^1, принадлежащих одной группе, или, что то же самое, имеющих одинаковый порядок, выполняется равенство

$$|w_k^1(m)| = w_{k1}^1(m), \tag{6}$$

где w_{k1}^1 — функция w_k^1, имеющая в своей группе наименьший ранг.

С учетом (5) и (4) для a_k ненулевого ранга имеем

$$a_k = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-2} w_k^1(m)\, \Delta^1(m). \tag{7}$$

Если первые разности последовательности (1) ограничены: $|\Delta^1(m)| \leqslant$ $\leqslant M_1$, то

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-2} |w_k^1(m)|\, M_1. \tag{8}$$

С учетом (6) множество элементов a_k по величине разбивается на n групп. Признаком принадлежности элемента группе является его порядок. Вычислив значения сумм в (8), получим

$$|a_k| \leqslant 2^{n-l-1} M_1, \tag{9}$$

где l — порядок a_k.

k	m															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	0
2	1	2	3	4	3	2	1	0	1	2	3	4	3	2	1	0
3	1	2	3	4	3	2	1	0	—1	—2	—3	—4	—3	—2	—1	0
4	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0
5	1	2	1	0	1	2	1	0	—1	—2	—1	0	—1	—2	—1	0
6	1	2	1	0	—1	—2	—1	0	1	2	1	0	—1	—2	—1	0
7	1	2	1	0	—1	—2	—1	0	—1	—2	—1	0	1	2	1	0
8	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
9	1	0	1	0	1	0	1	0	—1	0	—1	0	—1	0	—1	0
10	1	0	1	0	—1	0	—1	0	1	0	1	0	—1	0	—1	0
11	1	0	1	0	—1	0	—1	0	—1	0	—1	0	1	0	1	0
12	1	0	—1	0	1	0	—1	0	1	0	—1	0	1	0	—1	0
13	1	0	—1	0	1	0	—1	0	—1	0	1	0	—1	0	1	0
14	1	0	—1	0	—1	0	1	0	1	0	—1	0	—1	0	1	0
15	1	0	—1	0	—1	0	1	0	—1	0	1	0	1	0	—1	0

Для оценки элемента a_k нулевого ранга информации о величине максимальной разности недостаточно: в этом случае помимо M_1 необходимо знать величину $f(2^n-1)$. Аналогичная ситуация складывается при оценке a_k разностями более высоких порядков. Так, зная максимальное значение r-й разности, можно оценить значения a_k ранга не ниже r-го.

Рассмотрим теперь общий случай оценки коэффициента a_k полинома Уолша любого ранга и порядка. Прежде всего отметим свойства функций

$$w_k^r(s) = \sum_{m=0}^{s} w_k^{r-1}(m), \tag{10}$$

где $w_k^0(m) = w_k(m)$.

Функции w_k^r с одинаковым расположением нулей и r единиц в старших $(n-p+1)$ разрядах номера и с произвольными цифрами в младших $(p-1)$ разрядах равны по модулю:

$$\left| w^r_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_p\alpha_{p-1}\ldots\alpha_1}(m) \right| = \left| w^r_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_p\beta_{p-1}\ldots\beta_1}(m) \right|.$$

Здесь α_i, β_i — значения i-го разряда двоичного представления номера, а постоянная p такова, что $\sum_{i=p}^{n} \alpha_i = r$.

В частности, имеет место равенство

$$\left| w^r_{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_1}(m) \right| = w^r_{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_p 0 \ldots 0}(m). \tag{11}$$

Например:

$$w^2_{10100}(m) = \left| w^2_{10101}(m) \right|.$$

Для построения оценок a_k ранга выше первого применим формулу Абеля к (7):

$$a_k = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-3} w^2_k(m)\, \Delta^2(m) + w^2_k(2^n-2)\, \Delta^1(2^n-2). \tag{12}$$

Значения сумм в выражениях типа (12) легко вычисляются, если воспользоваться аппаратом Z-преобразования [4].

Функции Уолша, по определению [1], периодические. Рассматривая дискретное преобразование Уолша, удобно считать их тождественно равными нулю вне области задания $f(m)$:

$$w_k(m) = 0, \text{ если } \quad m < 0, \ m > 2^n - 1. \tag{13}$$

В этом случае Z-преобразование функций Уолша есть

$$Z\{w_k\} = Z\left\{w_{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1}\right\} = \prod_{i=1}^{n} \left[1 + (-1)^{\alpha_i} z^{-2^{n-i}}\right] =$$

$$= z^{1-2^n} \prod_{i=1}^{n} \left[z^{2^{n-i}} + (-1)^{\alpha_i}\right], \tag{14}$$

а Z-преобразование конечных сумм (10) —

$$Z\{w^r_k\} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^r z\{w_k\}. \tag{15}$$

Применим полученные соотношения для вычислений значений $w^r_k(2^n - r)$ и сумм в выражениях типа (8).

Согласно (13) и теореме о конечном значении [4],

$$w^1_k(2^n - 1) = w^1_k(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, Z\{w^1_k\} =$$

$$= \lim_{z \to 1} z^{2-2^n} \prod_{i=1}^{n} \left[z^{2^{n-i}} + (-1)^{\alpha_i}\right]. \tag{16}$$

Отсюда следует:

$$w^1_k(2^n - 1) = 0, \tag{17}$$

если ранг w^1_k отличен от нуля. Действительно, в этом случае двоичное число $\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1$ имеет хотя бы одно $\alpha_i = 1$, а следовательно, (16) содержит сомножитель, равный нулю.

С учетом (17) получим:

$$w^2_k(2^n - 2) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, Z\{w^2_k\} = \lim_{z \to 1} \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} \left[z^{2^{n-1}} + (-1)^{\alpha_i}\right]\right)^1}{(z-1)^1} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} 2^{n-t} \prod_{\substack{i=1; \\ i \neq t}}^{n} \left[1 + (-1)^{\alpha_i}\right]; \tag{18}$$

$$w^2_k(2^n - 2) = \begin{cases} 0, & \text{если } R > 1; \\ 2^{2n-l-1}, & \text{если } R = 1, \end{cases} \tag{19}$$

где l — порядок w^2_k.

Полученная ранее оценка (9) сразу следует из (10'), (19), (6), (8). Продолжая вычислять, получим

$$w_k^r(2^n - r) = \begin{cases} 0, & \text{если } R > r - 1; \\ 2^{n-r+1}\, 2^{(r-1)n - \sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i}, & \text{если } R = r - 1. \end{cases} \tag{20}$$

С учетом (19) для коэффициентов a_k ранга $R > 1$ выражение (12) примет вид

$$a_k = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-3} w_k^2(m)\, \Delta^2(m). \tag{21}$$

Если вторые разности $\Delta^2(m)$ последовательности $f(m)$ ограничены: $|\Delta^2(m)| \leqslant M^2$, то

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-3} w_k^2(m)\, M_2 = \frac{1}{2^n} w_k^3(2^n - 3)\, M_2.$$

Для коэффициентов a_k ранга $R=2$ из (20) имеем

$$|a_k| \leqslant 2^{2(n-1) - \sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i} M_2$$

и аналогично для a_k ранга $R=r$

$$|a_k| \leqslant 2^{r(n-1) - \sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i} M_r. \tag{22}$$

Используя свойство (11), из (22) получаем оценку (2) коэффициентов a_k ранга $R \geqslant r$:

$$|a_k| \leqslant 2^{r(n-1) - \sum\limits_{i=p}^{n} i\alpha_i} M_r,$$

где p таково, что $\sum\limits_{i=p}^{n} \alpha_i = r$.

Неравенство (2) разбивает множество элементов a_k на ряд групп, причем в одну группу могут попадать элементы различных порядков.

Пример. Пусть $r=2$, $n=5$, тогда

$$|a_k| \leqslant 2^{4\cdot 2 - \sum\limits_{i=1}^{5} i\alpha_i} M_2.$$

В одну группу входят a_{00110} и a_{01001}, поскольку $\sum\limits_{i=1}^{5} i\alpha_i$ для них одинаковы. Если ранг a_k больше 2, то в ту же группу входит и элемент a_{00111}.

Для элементов этой группы $|a_k| \leqslant 2^3 M_2$.

Полученные оценки позволяют судить о величине элементов дискретного преобразования Уолша, не производя вычислений, и оказываются полезными в задачах сокращенного представления таблиц, а также при разработке систем сжатия данных и функциональных преобразователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Т. Поляк, Ю. А. Шрейдер. Применение полиномов Уолша в приближенных вычислениях.— В кн.: Вопросы теории математических машин. Вып. 2. М., Физматгиз, 1962.
2. Ен. Функции Уолша и код Грея.— Зарубежная радиоэлектроника, 1972, № 7.
3. А. М. Заездный. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. Л., «Энергия», 1972.
4. Г. Дёч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., «Наука», 1971.

Поступила в редакцию 25 ноября 1972 г.;
окончательный вариант — 28 февраля 1974 г.

УДК 53.088 : 62-52

Ю. Б. ВИЛЕНКИН, В. И. ЯКИМЕНКО

(Ленинград)

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗАТОР С УСТРОЙСТВОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА ОЗУ

При проведении научных исследований объектов различной физической природы и сложности широкое распространение получили корреляционные анализаторы-корреляторы, в которых по мере совершенствования количественных и качественных параметров все чаще применяются сложные узлы и устройства вычислительной техники [1].

Значительный прогресс достигнут в разработке корреляторов параллельно-последовательного анализа. По своей структуре они близки к цифровым вычислительным машинам и новейшие из них содержат, кроме арифметического устройства, блоки оперативных запоминающих устройств (ОЗУ), используемых для накопления значений ординат вычисляемых корреляционных функций и получения запаздываний исследуемых процессов [2].

Корреляторы параллельно-последовательного анализа позволяют накапливать текущие оценки ординат корреляционных функций нестационарных низкочастотных случайных процессов в ритме эксперимента (ритме квантования процессов). При этом в интервале Δt между последовательными квантованиями должно производиться n-операций накопления ординат в соответствии с формулой [3]:

$$R(\tau_i,\ k\Delta t) = R[\tau_i, (k-1)\Delta t]\left(1-\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N} X(k\Delta t)\, Y(k\Delta t-\tau_i), \quad (1)$$

где τ_i — время запаздывания, соответствующее i-й ординате корреляционной функции ($i=1, 2, \ldots, n$); $R(\tau_i,\ k\Delta t)$ — оценка i-й координаты корреляционной функции в момент k-го шага квантования; Δt — интервал квантования случайного процесса; $N\Delta t$ — постоянная времени усреднения ($N\gg 1$), т. е. при текущем анализе процессов аппаратурой параллельно-последовательного типа может выполняться соотношение

$$\Delta t > nT_{\text{в}}, \quad (2)$$

где $T_{\text{в}}$ — время выполнения операций накопления одной ординаты в