

Вычислим сначала сумму

$$\sum_{k=0}^{N-1} W'_k(Z) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{Z^{-1} - \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)}. \quad (16)$$

Для этого в (16) проведём ряд тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{Z^{-1} - \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)} &= \frac{2}{N} \frac{1 - Z^N}{1 - Z^N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{Z}{1 - Z \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)} = \\ &= \frac{2}{N} \frac{Z}{1 - Z^N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1 - Z^N}{1 - Z \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Каждый член полученной суммы можно представить через сумму членов геометрической прогрессии, т. е.

$$\frac{1 - Z^N}{1 - Z \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)} = \sum_{l=0}^{N-1} Z^l \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} l k\right). \quad (18)$$

Подставляя это выражение в (17) и меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1} W'_k(Z) = \frac{2}{N} \frac{Z}{1 - Z^N} \sum_{l=0}^{N-1} Z^l \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} l k\right) = \frac{2Z}{1 - Z^N}. \quad (19)$$

Используя (19), легко проверить равенство (15), откуда следует тождественность (11) и (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Хемминг. Численные методы для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
2. Халберштейн. Применение рекурсивного комплексного анализа Фурье для реального времени.— ТИИЭР, 1966, т. 54, № 6.
3. Bruce James D. Discrete Fourier Transforms, Linear Filters and Spectrum Weighting.— IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 1968, v. AU-16, № 4.

Поступила в редакцию 12 декабря 1972 г.;
окончательный вариант — 15 апреля 1974 г.

УДК 517.948.33

А. С. ГОЛЬЦОВ, Д. Ф. СИМБИРСКИЙ
(Харьков)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ТЕПЛОВОГО ОБЪЕКТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Одной из наиболее сложных проблем экспериментальной теплофизики является измерение температурного поля и входных воздействий (граничных условий) высокотемпературных теплозащитных покрытий. Обычно теплозащитное покрытие представляет собой бесконечную пла-

стину из теплоизолирующего неметаллического материала, рабочая сторона которой находится в теплообмене со средой и интенсивно нагревается, а противоположная ограничена защищаемой поверхностью и предполагается теплоизолированной. Из-за имеющих место предельных тепловых и газодинамических нагрузок происходит термическое разложение и унос материала, т. е. одна из границ покрытия является подвижной. Обычно нагрев покрытия носит скачкообразный (ступенчатый) характер и непродолжителен.

Прямое измерение температуры подвижной поверхности какими-либо контактными или бесконтактными способами, а также определение граничных условий нагрева до настоящего времени практически неосуществимо, несмотря на свою актуальность. Выходом из создавшегося положения является размещение в толще покрытия нескольких датчиков температуры (например, термопар) и последующее расчетное определение искомых параметров [1, 2]. Обычно это приводит к рассмотрению обратной нелинейной задачи Стефана, которая относится к классу так называемых некорректно поставленных задач [2] и решена лишь для некоторых простейших случаев, не представляющих практической ценности.

Ниже будет сделана попытка воспользоваться для экспериментально-расчетного определения теплового состояния покрытия некоторыми методами общей теории систем, в частности оптимальным оцениванием с применением фильтра Калмана.

Рассмотрим достаточно общий случай ступенчатого нагрева покрытия, когда выделение (поглощение) тепла при химических реакциях на поверхности покрытия, а также количество тепла, уносимое с продуктами разложения, пренебрежимо мало по сравнению с количеством тепла, поступающим путем конвективного теплообмена с окружающей средой. Разрушение материала покрытия происходит равномерно с постоянной скоростью $W = \text{const}$, т. е. толщина покрытия

$$s(\tau) = h - W\tau, \quad (1)$$

где h — толщина покрытия в начальный момент времени; τ — время.

На подвижной рабочей поверхности покрытия с момента времени $\tau \geq 0$ задаются граничные условия — температура среды $T = \text{const}$ и коэффициент теплоотдачи $\alpha = \text{const}$. Предполагаем, что температуропроводность материала покрытия a линейным образом зависит от температуры x , а удельные теплоемкость c и плотность ρ постоянны, т. е.

$$a = a_0 + \alpha x,$$

$$c\rho = \text{const}.$$

Рассматриваемый объект описывается нестационарным нелинейным уравнением в частных производных. Для получения практических результатов выполним его дифференциально-разностную аппроксимацию, для чего разобьем покрытие по толщине на n элементарных участков — слоев, как это показано на рис. 1 ($n=7$). В процессе разрушения количество слоев изменяться не будет и, следовательно, толщина каждого элементарного слоя будет уменьшаться следующим образом:

$$d = d_0 - v\tau, \quad (2)$$

где $v = \frac{2W}{2n-1}$ — скорость деформации слоев; d_0 — толщина слоев в начальный момент времени.

Температуры узловых точек составляют вектор состояния объекта

$$\vec{X}^t(\tau) = [x_1 x_2 \dots x_n],$$

где t — знак транспонирования.

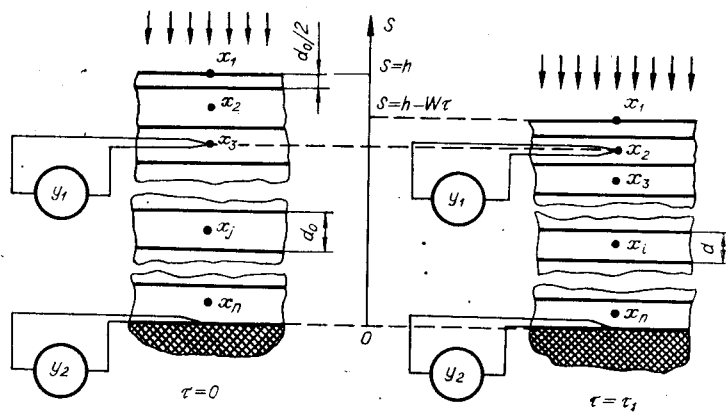


Рис. 1.

В этом случае система, представляющая собой математическую модель объекта, по аналогии с [3] может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\tau} = \dot{x}_1 &= \frac{2}{(d_0 - v\tau)^2} \left[- \left(a_0 + \frac{\alpha(d_0 - v\tau)}{c\rho} \right) x_1 + a_0 x_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\kappa}{2} (x_2^2 - x_1^2) \right] + \frac{2u}{c\rho(d_0 - v\tau)}; \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{(d_0 - v\tau)^2} \left[a_0 (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{\kappa}{2} (x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2) \right]; \\
 &\dots \dots \dots \\
 \dot{x}_i &= \frac{1}{(d_0 - v\tau)^2} \left[a_0 (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + \frac{\kappa}{2} (x_{i-1}^2 - 2x_i^2 + x_{i+1}^2) \right]; \\
 &\dots \dots \dots \\
 \dot{x}_n &= \frac{1}{(d_0 - v\tau)^2} \left[a_0 (x_{n-1} - x_n) + \frac{\kappa}{2} (x_{n-1}^2 - x_n^2) \right],
 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$u = \alpha T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (n=7).$$

Кроме того, задается начальный вектор состояния $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$.

Необходимую информацию об объекте дают термопары, размещенные в толще покрытия. В частности, как это показано на рис. 1, таких термопар две: одна из них y_2 расположена на теплоизолированной границе покрытия, а начальное положение второй y_1 — в центре третьего слоя. По показаниям этих термопар, в которых присутствуют помехи (шумы), и будет производиться идентификация теплового состояния покрытия и его граничных условий.

В соответствии с принятой математической моделью объекта термопара y_1 в процессе разрушения покрытия переходит из слоя в слой (см. рис. 1) и затем перестает существовать: разрушается при выходе на рабочую поверхность. В связи с этим составляющие вектора наблюдения объекта $\vec{Y}_k^T = [y_{1k} y_{2k}]$ могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 y_{1k} &= \frac{1}{(2n-1)^2 d_0 - 4v\tau_k} \left(2(1 - \delta_1 - \delta_2) [(2n-1)^2 d_0 - (2n-3)v\tau_k] x_{1k} + \right. \\
 &\quad \left. + [(2n-1)^2 (1 - \delta_1 - \delta_2) d_0 - 10(1 + \delta_2) - (4 - 2\delta_1 - 4\delta_2 n)v\tau_k] x_{2k} + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_1 [(2n-1)^2 d_0 - (2n-6)v\tau_k] x_{3k} \right) + \omega_{1k}, \\
 y_{2k} &= x_{7k} + \omega_{2k},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\tau_k \Delta k \Delta \tau, \quad x_{ik} \Delta x_i (k \Delta \tau).$$

Вспомогательные функции δ_1 и δ_2 задаются таким образом:

$$\delta_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau_k \leq \frac{(2n-1)^2}{2(2n-3)} \frac{d_0}{v}; \\ 1 & \text{при } \tau_k > \frac{(2n-1)^2}{2(2n-3)} \frac{d_0}{v}; \end{cases}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau_k \leq \frac{4}{2n-1} \frac{d_0}{v}; \\ 1 & \text{при } \tau_k > \frac{4}{2n-1} \frac{d_0}{v}. \end{cases}$$

Итак, уравнение системы, состоящей из объекта (3) и устройства наблюдения (4), может быть представлено в следующей векторно-матричной форме:

$$\frac{d\vec{X}}{d\tau} = \dot{\vec{X}}(\tau) = \varphi(\vec{X}, \tau) + Gu; \quad (5)$$

$$\vec{Y}_k = B_k \vec{X}_k + \vec{\omega}_k,$$

где φ — $(n \times n)$ — нелинейная вектор-функция; G — $(n \times 1)$ — матрица управления; B_k — $(2 \times n)$ — матрица наблюдения; $\vec{\omega}_k$ — дискретный «белый» (гауссовский) шум измерений с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$\text{cov}(\vec{\omega}_k \vec{\omega}_k^T) = E(\vec{\omega}_k \vec{\omega}_k^T) = N = \text{diag}[n_1 n_2].$$

Задача идентификации рассматриваемого нестационарного нелинейного объекта ставится следующим образом.

Известно: структура объекта, описываемая уравнением (3); вектор наблюдения (4) — показания термомпар, измеряемые с помехой.

Необходимо определить: вектор состояния объекта $X_k \Delta \vec{X}(\tau) |_{\tau=k\Delta}$; параметры объекта: коэффициент теплоотдачи α и скорость движения границы W (или v); входное воздействие $u = \alpha T$.

Для решения поставленной задачи дополним вектор состояния объекта вектором $b^T = |v \alpha u|$ идентифицируемых параметров. Исходя из обусловленного выше постоянства во времени параметров v , α и u (также W и T) может быть получено следующее дополнительное уравнение:

$$\frac{db^T}{d\tau} = \dot{b}^T = 0. \quad (6)$$

Дополнив уравнение (3) объекта уравнением (6), получим следующее описание расширенной системы:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}(\tau) &= f(\vec{R}(\tau), \tau); \\ \vec{Y}_k &= m(\vec{R}_k, \tau_k) + \vec{\omega}_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\vec{R}^T(\tau) = [\vec{X}^T(\tau) b^T]$ — расширенный вектор состояния системы (7).

Вектор $\vec{R}(\tau)$ может быть подвергнут последовательному оцениванию. Для этого система линеаризуется вдоль некоторой опорной траектории $\vec{R}^*(\tau)$, причем сама опорная траектория так же будет последовательно оцениваться. Линеаризованная и представленная в дискретной

форме, как это выполнено в [4], система (7) записывается следующим образом:

$$\vec{R}_{k+1} = \Phi_{k+1, k} \vec{R}_k; \quad (8)$$

$$\vec{Y}_{k+1} = H_{k+1} \vec{R}_{k+1} + \vec{\omega}_{k+1},$$

где

$$\Phi_{k+1, k} \approx \exp F_{k+1} \Delta \tau = I + F_{k+1} \Delta \tau + F_{k+1}^2 \frac{\Delta \tau^2}{2!} + \dots, \quad (9)$$

$$F_{k+1} = \frac{\partial f(\vec{R}, \tau)}{\partial \vec{R}} \Big|_{\vec{R}(\tau) = \vec{R}_k^*}; \quad (10)$$

$$H_k = \frac{\partial m(\vec{R}, \tau)}{\partial \vec{R}} \Big|_{\vec{R}(\tau) = \vec{R}_k^*}; \quad (11)$$

$$R^* \Delta R^*(\tau) | \tau = k \Delta \tau.$$

К системе (8) может быть применен известный алгоритм дискретного линейного фильтра Калмана, представляющий собой следующую последовательность операций над векторами и матрицами [4, 5]:

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{k+1/k+1} &= \widehat{R}_{k+1/k} + K_{k+1} [\vec{Y}_{k+1} - H_{k+1} \widehat{R}_{k+1/k}]; \\ \widehat{R}_{k+1/k} &= \Phi_{k+1/k} \widehat{R}_{k/k}; \\ K_{k+1} &= P_{k+1/k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + N_{k+1}]^{-1}; \\ P_{k+1/k} &= \Phi_{k+1, k} P_{k/k} \Phi_{k+1, k}^T; \\ P_{k+1/k+1} &= P_{k+1/k} - K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1/k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\widehat{R}_{k+1/k+1}$ — оценка расширенного вектора состояния, полученная по известному вектору наблюдения \vec{Y}_{k+1} (двойная индексация используется для обозначения момента времени, для которого производится оценка, — верхний индекс и момента наблюдения выхода — нижний индекс); $\widehat{R}_{k+1/k}$ — прогнозируемое значение расширенного вектора состояния на момент времени $k+1$; K_{k+1} — весовая матрица; $P_{k+1/k+1}$ — ковариационная матрица ошибок оценок; $P_{k+1/k}$ — ковариационная матрица ошибок прогнозирования.

Процедура идентификации выполняется следующим образом. Для момента времени $k=0$ задается начальный расширенный вектор состояния $\widehat{R}_{0/0}$ и ковариационная матрица начальных ошибок оценок $P_{0/0}$. Первые семь составляющих $\widehat{R}_{0/0}$ или $\widehat{X}_{0/0}$ могут быть заданы весьма точно — начальное распределение температуры \vec{X}_0 в покрытии, а составляющие вектора $\widehat{b}_{0/0}$ — со значительной неточностью. Это находит свое отражение в соответствующем выборе матрицы $P_{0/0}$ [5]. По значениям \vec{Y}_k в соответствии с формулами (10), (11) и (12) определяются оценки расширенного вектора состояния $\widehat{R}_{1/1}$ и ковариационная матрица ошибок оценок $P_{1/1}$ для момента времени $k=1$. Далее процедура повторяется для вычисления $\widehat{R}_{2/2}$ и $P_{2/2}$, $\widehat{R}_{3/3}$ и $P_{3/3}$ и т. д.

Если начиная с некоторого момента времени оценки $\widehat{v}_{k/k}$, $\widehat{\alpha}_{k/k}$ и $\widehat{u}_{k/k}$ сходятся к некоторым значениям, а диагональные элементы $P_{k/k}$ при

этом становятся весьма малыми, то идентификация считается успешно завершённой (сходящейся).

Общепринятым способом исследования сходимости является математическое моделирование процедуры идентификации, которая позволяет в дальнейшем перейти к практике.

Математическое моделирование заключается в следующем.

1. Методом Рунге — Кутты интегрируется уравнение объекта (5) при некоторых заданных значениях всех параметров объекта. В результате вычисляются значения вектора состояния \vec{X}_k , которые будем называть эталонными.

2. Исходя из полученного решения и заданных параметров объекта находим значения вектора наблюдения системы \vec{Y}_k (с добавлением помехи $\vec{\omega}_k$). 3. По полученным значениям вектора наблюдения \vec{Y}_k в соответствии с вышеприведенным проводится идентификация расширенного вектора состояния $\hat{\vec{R}}_{k/h}$.

4. Полученные оценки параметров v , α и u объекта сравниваются с их заданными (эталонными) значениями и делается вывод о сходимости процедуры идентификации.

Причем начальные оценки v , α и u (или $\hat{b}_{0/0}$) задаются с различной степенью неточности с целью исследования устойчивости сходимости.

На рис. 2—4 представлены результаты математического моделирования процедуры идентификации рассматриваемого объекта при следующих эталонных значениях определяемых параметров:

$u = 10,12 \times 10^6 \text{ Вт/м}^2$; $v = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$; $\alpha = 5060 \text{ Вт/м}^2$.

Объекту свойственны следующие геометрические и теплофизические характеристики: $a_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\kappa = -8,74 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с} \cdot \text{К}$; $d_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $c_p = 3,373 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3 \cdot \text{К}$.

Начальное распределение температуры $\vec{X}_0 = 0$. Значения составляющих y_{1k} и y_{2k} вектора наблюдения приведены на рис. 2 (вектор помехи $\vec{\omega}_k$ характеризовался дисперсией $\sigma^2 = 4$).

Выполненное исследование показало устойчивую сходимость процедуры идентификации к эталонному решению при различной неточности задания начальных оценок идентифицируемых параметров α и T . Математическое моделирование процедуры идентификации выполнялось для следующих трех вариантов начальных оценок $\hat{b}_{0/0}$.

1-й вариант: $\hat{v}_{0/0} = 1,65 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$; $\hat{\alpha}_{0/0} = 5560 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$; $\hat{u}_{0/0} = 11,18 \times 10^6 \text{ Вт/м}^2$.

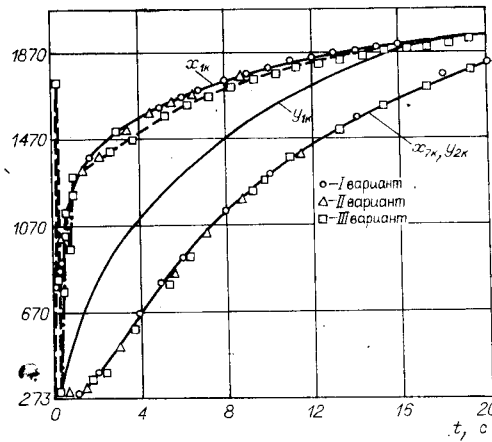


Рис. 2.

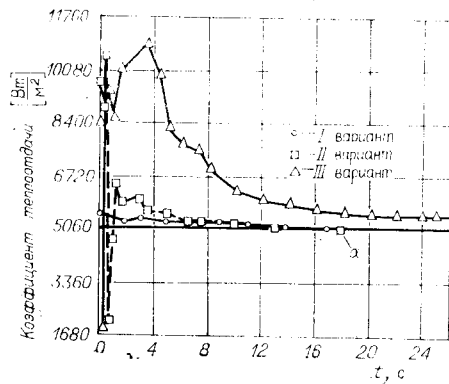


Рис. 3.

II-й вариант: $\hat{v}_{0/0} = 1,53 \cdot 10^{-5}$ м/с; $\hat{\alpha}_{0/0} = 10\,500$ Вт/м²·К;
 $\hat{u}_{0/0} = 7,03 \cdot 10^6$ Вт/м².

III-й вариант: $\hat{v}_{0/0} = 1,53 \cdot 10^{-5}$ м/с; $\hat{\alpha}_{0/0} = 8380$ Вт/м²·К;
 $\hat{u}_{0/0} = 12,77 \cdot 10^6$ Вт/м².

На рис. 2 представлено движение по временным шагам оценок температур поверхности разрушения \hat{x}_{1k} и теплоизолированной поверхности покрытия \hat{x}_{7k} . Эталонные значения x_{1k} и x_{7k} найдены методом

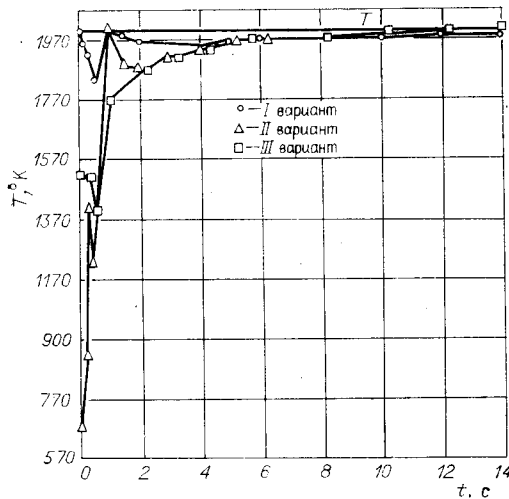


Рис. 4.

Рунге — Кутта. Наблюдается хорошее совпадение с относительной погрешностью, не превышающей 0,03 после нескольких временных шагов. Окончательная погрешность в оценках коэффициента теплоотдачи (рис. 3) не превышает 0,05. На рис. 4 приведены результаты идентификации температуры среды, определяемой по выражению $\hat{T}_{k/k} = \frac{\hat{u}_{k/k}}{\hat{\alpha}_{k/k}}$. Окончательная погрешность оценок температур среды не превышает 0,03 при всех вариантах задания начального ее значения.

Несколько худшие результаты получены для оценок скорости разрушения, для которой окончательная погрешность составляет до 10%.

Таким образом, положительные результаты математического моделирования процедуры идентификации дают основание сделать вывод о применимости фильтра Калмана для определения граничных условий и теплового состояния теплозащитных покрытий, прямое измерение которых не представляется возможным.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. М. Алифанов. Прямые методы решения линейных обратных задач теплопроводности.— ИФЖ, 1973, т. 24, № 6.
2. Б. М. Панкратов, О. М. Алифанов, А. А. Иванов, А. Д. Маркин. Исследование теплозащитных материалов в нестационарном режиме работы.— ИФЖ, 1973, т. 24, № 1.
3. Д. Ф. Симбирский. Приближенный анализ динамики процессов переноса тепла в пространстве состояний.— В кн.: Экспериментальные методы термостойкости газотурбинных двигателей. Вып. 1. Харьков, 1973.
4. Д. Ф. Симбирский, Э. Г. Чайка, А. В. Дабагян, Л. И. Жильцова. Приложение теории оптимальной фильтрации к задачам оценки состояния и идентификации граничных условий одномерных тепловых систем.— В кн.: Экспериментальные методы термостойкости газотурбинных двигателей. Вып. 1. Харьков, 1973.
5. R. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.— J. Basic Eng. (ASMS Trans), 1960, v. 82 D, p. 35—45.

Поступила в редакцию 25 декабря 1973 г.