Полученные соотношения для $P(\pi)$ и $\overline{W}(c)$ позволяют найти оптимальное количество приборов c путем определения минимума целевой функции методом цифрового перебора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Л. Саати. Элементы теорий массового обслуживания и ее приложения. М., «Советское радио», 1971.
2. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание, теория и приложения. М., «Мир», 1965.
3. Г. П. Климов. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.

Поступило в редакцию 9 апреля 1973 г.

УДК 519.24

А. М. АЗИЗОВ, В. П. ГОНЧАРУК, А. Н. ГОРДОВ

(Ленинград)

ПРОСТЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ АНАЛИЗЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Точный анализ параметрических эффектов даже для простейших измерительных преобразователей представляет собой сложную задачу [1]. В связи с этим возникает необходимость в применении различных приближенных методов.

В данной работе параметрические эффекты в измерительных преобразователях исследуются двумя достаточно простыми приближенными методами и полученные результаты сравниваются с точными результатами.

Пусть измерительный преобразователь описывается уравнением:

$$\frac{du(t)}{dt} + m(t)\,u(t) = m(t)\,\Theta(t); \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

где $u(t)$ — показания измерительного преобразователя; $\Theta(t)$ — измеряемая характеристика исследуемого объекта; $m(t)$ — зависящий от времени параметр измерительного преобразователя.

Из (1) и (2) получим

$$u(t) = \int_0^t m(\tau)\,\Theta(\tau)\,e^{-\int_\tau^t m(\eta)d\eta}\,d\tau. \tag{3}$$

Пусть $m(t)$ и $\Theta(t)$ представляют собой стационарные нормально распределенные случайные функции.

Для математического ожидания выходной величины имеем

$$M\{u(t)\} = \overline{u(t)} = \int_0^t M\left\{m(\tau)\,\Theta(\tau)\,e^{-\int_\tau^t m(\eta)d\eta}\right\} d\tau. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение трехмерный случайный вектор с компонентами $m(\tau)$, $\Theta(\tau)$, $\mu(\tau)$, где $\mu(\tau) = \int_\tau^t m(\eta)\,d\eta$ также является нормально распределенной случайной функцией.

Пусть $E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — характеристическая функция указанного вектора. Тогда вместо (4) имеем

$$\overline{u(t)} = \int_0^t \frac{\partial^2 E}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2}\Bigg|_{\substack{\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_3=i}} d\tau. \tag{5}$$

Учитывая, что характеристическая функция нормально распределенного случайного вектора может быть однозначно выражена через элементы корреляционной матрицы K_{kj} вектора и математические ожидания m_j компонент вектора,

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j m_j - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j K_{kj} \right\}, \tag{6}$$

из соотношения (5) получим

$$\overline{u(t)} = \int_0^t \left\{ \bar{\Theta} \left[\bar{m} - \int_\tau^t K_m(\eta - \tau)\, d\eta \right] + K_{m\Theta}(0) - \left[\bar{m} - \int_\tau^t K_m(\eta - \tau)\, d\eta \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_\tau^t K_{m\Theta}(\eta - \tau) \right\} \exp\left\{ -\bar{m}(t - \tau) + \frac{1}{2} \int_\tau^t \int_\tau^t K_m |\eta_1 - \eta|\, d\eta_1 d\eta \right\} d\tau, \tag{7}$$

где $\bar{\Theta} = M\{\Theta(t)\}$; $\bar{m} = M\{m(t)\}$, $K_m(\tau)$, $K_{m\Theta}(\tau)$ — корреляционная функция параметра $m(t)$ и взаимная корреляционная функция этого параметра и измеряемой характеристики исследуемого объекта.

Пусть $K_{m\Theta}(\tau) = K_{m\Theta}(0)\, e^{-\gamma_{m\Theta}|\tau|}$.

Для $K_m(\tau) = c\delta(\tau)$ соотношение (7) становится

$$\overline{u(t)} = \bar{\Theta} \left[1 - e^{-(\bar{m} - c)t} \right] + \frac{K_{m\Theta}(0)}{\gamma_{m\Theta}} \frac{\gamma_{m\Theta} - (\bar{m} - c)}{\bar{m} - c} \left[1 - e^{-(\bar{m} - c)t} \right] +$$

$$+ \frac{K_{m\Theta}(0)}{\gamma_{m\Theta}} \frac{\bar{m} - c}{\gamma_{m\Theta} + \bar{m} - c} \left[1 - e^{-(\bar{m} - c)t - \gamma_{m\Theta} t} \right]. \tag{8}$$

В случае $K_m(\tau) = K_m(0)\, e^{-\gamma_m |\tau|}$ из (7) получаем

$$\overline{u(t)} = \bar{\Theta} \left\{ 1 - \exp\left[-\left(1 - k^2 \frac{\bar{m}}{\gamma_m} \right) \bar{m} t - k^2 \frac{\bar{m}^2}{\gamma_m^2} \left(1 - e^{-\gamma_m t} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{K_{m\Theta}(0)}{\gamma_{m\Theta}} \left(1 - e^{-\gamma_{m\Theta} t} \right) \exp\left[-\left(1 - k^2 \frac{\bar{m}}{\gamma_m} \right) \bar{m} t - k^2 \frac{\bar{m}^2}{\gamma_m^2} \left(1 - e^{-\gamma_m t} \right) \right] +$$

$$+ \frac{K_{m\Theta}(0)}{\gamma_m} e^{-k^2 \frac{\bar{m}^2}{\gamma_m^2}} \int_{e^{-\gamma_m t}}^{1} \left(1 - Z^{\frac{\gamma_{m\Theta}}{\gamma_m}} \right) Z^{\left(1 - k^2 \frac{\bar{m}}{\gamma_m} \right) \frac{\bar{m}}{\gamma_m} - 1} e^{k^2 \frac{\bar{m}^2}{\gamma_m^2} Z}\, dZ, \tag{9}$$

где $k^2 = \dfrac{K_m(0)}{\bar{m}^2}$.

Для установившегося режима измерения показания измерительного преобразователя будут определяться выражениями:

$$\overline{u(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{\Theta} + K_{m\Theta}(0) \frac{\gamma_{m\Theta}}{(\bar{m} - c)(\gamma_{m\Theta} + \bar{m} - c)} \tag{10}$$

для случая $K_m(\tau) = c\delta(\tau)$ и при $K_m(\tau) = K_m(0)\, e^{-\gamma_m |\tau|}$

$$\overline{u(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{\Theta} + \frac{K_{m\Theta}(0)}{\bar{m}} e^{-k^2 \frac{\bar{m}^2}{\gamma_m^2}} \left\{ \frac{1}{1 - k^2 \frac{\bar{m}}{\gamma_m}} \Phi\left[\left(1 - k^2 \frac{\bar{m}}{\gamma_m} \right) \frac{\bar{m}}{\gamma_m} \left(1 - k^2 \frac{\bar{m}}{\gamma_m} \right) \frac{\bar{m}}{\gamma_m} + 1; \right. \right.$$

$$\left. k^2 \frac{\bar{m}^2}{\gamma_m^2} \right] - \frac{\frac{\bar{m}}{\gamma_m}}{\left(1 - k^2 \frac{\bar{m}}{\gamma_m} \right) \frac{\bar{m}}{\gamma_m} + \frac{\gamma_{m\Theta}}{\gamma_m}} \Phi\left[\left(1 - k^2 \frac{\bar{m}}{\gamma_m} \right) \frac{\bar{m}}{\gamma_m} + \right.$$

$$+\frac{\gamma_{m\Theta}}{\gamma_m}\left(1-k^2\frac{\overline{m}}{\gamma_m}\right)\frac{\overline{m}}{\gamma_m}+\frac{\gamma_{m\Theta}}{\gamma_m}+1; \qquad k^2\frac{\overline{m}^2}{\gamma_m^2}\Big]\Big\}, \tag{11}$$

где

$$\Phi(a,\ c;\ Z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{Zt}dt$$

— конфлюэнтная гипергеометрическая функция.

Полученные выражения (8), (9) для математического ожидания показаний измерительного преобразователя являются точными.

Так как использование подобных выражений в практике оценки динамических свойств измерительных преобразователей затруднительно, возникает необходимость в получении приближенных, но более простых соотношений.

Рассмотрим два метода получения указанных приближенных формул.

Первый из них основан на усовершенствованном методе последовательных приближений [2]. В соответствии с этим методом приближенное решение уравнения (1) находится таким образом:

$$u_n(t)=\sum_{i=0}^{n} V_i(t). \tag{12}$$

Здесь $V_0(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{dV_0(t)}{dt}+\overline{m}V_0(t)=m(t)\,\Theta(t), \tag{13}$$

а $V_i(t)$ при $i=1, 2, \ldots, n$ являются решениями уравнений

$$\frac{dV_i(t)}{dt}+\overline{m}V_i(t)=-\widetilde{m}(t)\,V_{i-1}(t), \tag{13a}$$

где $\widetilde{m}(t)=m(t)-\overline{m}$. При этом $V_i(0)=0$, $i=0, 1, \ldots, n$.

Для членов $V_0(t)$ и $V_1(t)$ имеем:

$$V_0(t)=\int\limits_0^t m(\eta)\,\Theta(\eta)\,e^{-\overline{m}(t-\eta)}\,d\eta; \tag{14}$$

$$V_1(t)=-\int\limits_0^t\int\limits_0^{\eta_1}\widetilde{m}(\eta_1)\,m(\eta_2)\,\Theta(\eta_2)\,e^{-\overline{m}(\eta_1-\eta_2)}e^{-\overline{m}(t-\eta_1)}d\eta_2 d\eta_1. \tag{15}$$

Ограничиваясь первым приближением для математического ожидания показаний измерительного преобразователя и принимая

$$K_{m\Theta}(\tau)=K_{m\Theta}(0)\,e^{-\gamma_{m\Theta}|\tau|}, \qquad K_m(\tau)=K_m(0)\,e^{\gamma_{-m}|\tau|}, \quad \text{получим}$$

$$\overline{u(t)}\approx\overline{u_1(t)}\xrightarrow[t\to\infty]{}\overline{\Theta}\left(1-k^2\frac{\overline{m}}{\overline{m}+\gamma_m}\right)+\frac{K_{m\Theta}(0)}{\overline{m}}\left(1-\frac{\overline{m}}{\overline{m}+\gamma_{m\Theta}}\right). \tag{16}$$

Суть второго метода сводится к следующему.

Осуществляем операцию математического ожидания над всеми членами уравнения (1). Получаем

$$\frac{d\overline{u(t)}}{dt}+\overline{m}\,\overline{u(t)}+K_{mu}(t,\ t)=\overline{m}\overline{\Theta}+K_{m\Theta}(0), \tag{17}$$

где $K_{mu}(t,t)$ — взаимная корреляционная функция параметра $m(t)$ и показаний измерительного преобразователя.

Теперь все члены уравнения (1) умножаем на $\widetilde{m}(t_1)=m(t_1)-\overline{m}$, после этого над полученным соотношением осуществляем операцию математического ожидания. Получаем

$$\frac{\partial K_{mu}(t_1,\ t)}{\partial t}+\overline{m}K_{mu}(t_1,\ t)+K_m(t_1,\ t)\,\overline{u(t)}=K_m(t_1,\ t)\,\overline{\Theta}+\overline{m}K_{m\Theta}(t_1,\ t). \tag{18}$$

При выводе (18) предполагалось, что процесс $u(t)$ является нормально распределенным случайным процессом.

Решая совместно уравнения (17) и (18), получим для установившегося режима измерения при $K_m(\tau)=K_m(0)\,e^{-\gamma_m|\tau|}$

$$\overline{u(t)}\xrightarrow[t\to\infty]{}\overline{\Theta}+\frac{K_{m\Theta}(0)}{\overline{m}}\cdot\frac{1-\dfrac{\overline{m}}{\overline{m}+\gamma_{m\Theta}}}{1-k^2\dfrac{\overline{m}}{\overline{m}+\gamma_m}}. \tag{19}$$

Рассмотрим два численных примера, из которых становится очевидной вполне удовлетворительная точность полученных выше приближенных соотношений.

1. $\overline{\Theta}=0$; $\overline{m}=10^4$ 1/ч; $\gamma_m=8\cdot10^3$ 1/ч; $\gamma_{m\Theta}=80$ 1/ч; $k=0{,}4$; $K_{m\Theta}(0)=\rho\sqrt{K_m(0)K_\Theta(0)}$; $\rho=0{,}8$; $K_\Theta(0)$ — дисперсия измеряемой характеристики $\Theta(t)$.

По точной формуле (11) $\dfrac{\overline{u(t)}}{\sqrt{K_\Theta(0)}}\xrightarrow[t\to\infty]{}0{,}00329$.

Соотношение (16) дает $\dfrac{\overline{u(t)}}{\sqrt{K_\Theta(0)}}\xrightarrow[t\to\infty]{}0{,}00254$, что отличается на $\sim22\%$ от точного результата.

Из (19) получаем $\dfrac{\overline{u(t)}}{\sqrt{K_\Theta(0)}}\xrightarrow[t\to\infty]{}0{,}00279$. Этот результат отклоняется от точного на $\sim15\%$.

2. $\overline{\Theta}=0$; $\overline{m}=100$ 1/ч; $\gamma_m=\gamma_{m\Theta}=10^4$ 1/ч; $k=0{,}4$; $\rho=0{,}8$.

Точный результат: $\dfrac{\overline{u(t)}}{\sqrt{K_\Theta(0)}}\xrightarrow[t\to\infty]{}0{,}3219$.

Из (16) получаем $\dfrac{\overline{u(t)}}{\sqrt{K_\Theta(0)}}\xrightarrow[t\to\infty]{}0{,}3168$, что отличается на $\sim16\%$ от точного результата.

Из (19) имеем $\dfrac{\overline{u(t)}}{\sqrt{K_\Theta(0)}}\xrightarrow[t\to\infty]{}0{,}3173$, т. е. отличие от точного результата составляет $\sim14\%$. Таким образом, второй из рассмотренных методов является несколько более точным и достаточно простым.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Азизов, В. А. Иванов, В. И. Лопухов, А. С. Поваренков. Вероятностный анализ измерительных систем первого порядка.— Автометрия, 1974, № 2.
2. S. A. Schelkunoff. Solution of Linear and Slightly Nonlinear Differential Eguations.— Quant. J. Appl. Math., 1946, v. 3, N 4.

Поступило в редакцию 20 марта 1974 г.

УДК 621.317.3

Г. С. ПЕВЗНЕР, Г. З. ЩЕРБАКОВСКИЙ

(Ленинград)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ КОММУТАТОРА

За последнее время появился ряд работ, посвященных математическому описанию коммутаторов. Так, в [1] приведена простейшая статическая модель коммутатора напряжений постоянного тока. Для этой модели получена приближенная зависимость ошибки коммутации от параметров коммутатора и исследованы схемные методы уменьшения этой ошибки. В работе [2] приведены выражения для погрешности коммутации бесконтактных коммутаторов напряжения: для одноступенчатого коммутатора — точная формула, для двухступенчатого — приближенная. При выводе формул все сопротивления полагаются чисто активными, т. е. предлагается статическая модель измерительного коммутатора. Наконец, в [3] подробно исследованы коммутаторы различной структуры: одноступенчатые и многоступенчатые, с отклонением и закорачиванием неопрашиваемых каналов, комбинированные. Рассмотрен случай коммутации сигналов генераторных дат-