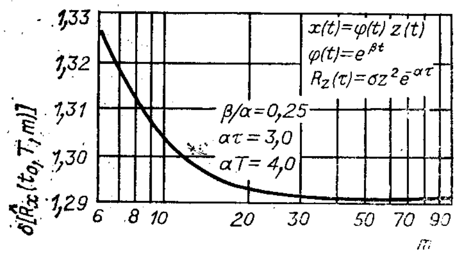

Рис. 1.

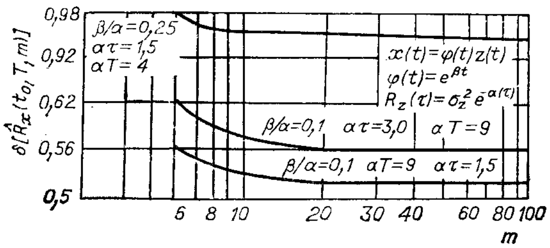

Рис. 2.

$$+2e^{-2\alpha\tau}Sh\left(4\beta\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right)+e^{-(4m+2)\beta\Delta t}\left[\frac{1}{Sh\left((\alpha-\beta)\,\Delta t\right)}\;e^{-(4m+1)(\alpha-\beta)\Delta t}-\right.$$

$$\left.-e^{-2\rho_0(\alpha-\beta)\Delta t}Ch\left((\alpha-\beta)\,\Delta t\right)+\frac{e^{-2\alpha\tau}}{Sh\beta\Delta t}\;e^{\beta\Delta t}-e^{2\rho_0\beta\Delta t}Ch\left(\beta\Delta t\right)\right]\Bigg\}, \qquad (7)$$

где

$$\rho_0=\mathrm{entie}\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right).$$

На рис. 1, 2 представлены графики относительной ошибки оценки (1) функции корреляции

$$\delta\left[\hat{R}_{x_д}(t,\ \tau,\ \Delta t,\ m)\right]=\frac{\sqrt{\Delta^2\left[R_{x_д}\right]+\sigma^2\left[R_{x_д}\right]}}{R_x(t,\ \tau)} \qquad (8)$$

от числа m для процессов с различными численными значениями параметров. При этом полный интервал $2m\Delta t$ соответствует полученному для интегрального оператора оптимальному значению интервала измерений T *.

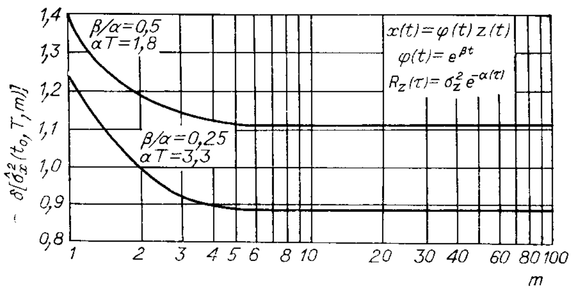

Рис. 3.

Графики рис. 3 отражают ход зависимости относительной оценки дисперсии от числа m, получаемой из формул (6)—(8) при $\tau=0$.

В результате исследования можно рекомендовать следующие минимальные числа m для мультипликативных случайных процессов с различными значениями параметров:

при $\beta/\alpha=0{,}25$ и 0,1, $\alpha\tau=3$, $m=40$ и 20 соответственно;
при $\beta/\alpha=0{,}25$ и 0,1, $\alpha\tau=1{,}5$, $m=10$ и 20 соответственно;
при $\beta/\alpha=0{,}5$ и 0,2, $\alpha\tau=0$, $m=8$ и 5 соответственно.

Поступило в редакцию 9 июля 1973 г.

УДК 62-50.007

Г. В. ЕВЗЛИНА, А. А. ТЕР-ХАЧАТУРОВ

(Баку)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При создании информационно-измерительных систем (ИИС) сбора и обработки первичной информации приходится решать задачи выбора необходимого числа измерительных приборов при условии минимума функции потерь. В настоящей статье исследуется ИИС, в которой заявки на измерение поступают как регулярно, через период t_0',

* В. А. Геранин, И. И. Козлов, М. И. Шлякцу. О точности корреляционного анализа медленно-нестационарных процессов.— Автометрия, 1971, № 3.

так и в случайные моменты времени в соответствии с пуассоновским распределением с параметром λ', причем время ожидания регулярных заявок равно нулю, а случайно поступающие заявки ожидают сколь угодно долго. Время обслуживания заявок обоих типов распределено экспоненциально с параметром μ.

Функция $A(c)$ потерь (целевая функция) такой ИИС может быть представлена как

$$A(c) = B(c) + D(c), \tag{1}$$

где c — число измерительных приборов; $B(c)$ — функция затрат на приборы; $D(c)$ — функция убытков, связанных с потерями и временными задержками измерений.

Функция

$$D(c) = k\overline{W}(c) + dP_{п}(c), \tag{2}$$

где k — стоимость единицы времени простоя случайной заявки на измерение; $\overline{W}(c)$ — математическое ожидание времени простоя случайной заявки; d — стоимость потери регулярной заявки; $P_{п}(c)$ — вероятность потери регулярной заявки.

Описанной математической модели соответствуют ИИС количественного учета на объектах хранения жидких продуктов, в которых природа регулярных заявок связана с необходимостью периодического контроля состояния резервуаров, а природа случайных — с контрольно-оперативными и товарно-учетными операциями в процессах приема и отпуска жидкого продукта.

Таким образом, искомыми величинами в исследуемой системе массовых обслуживаний (СМО) являются математическое ожидание $\overline{W}(c)$ времени простоя случайных заявок и вероятность $P_{п}(c)$ потери регулярных. Рассматриваемая нами ИИС количественного учета строится как c независимых однолинейных СМО с комбинированным входным потоком. Поэтому нами в настоящей работе случайный поток принят как имеющий интенсивность $\lambda = \lambda'/c$ и регулярный — с периодом $t_0 = t_0' \cdot c$. Очевидно, что $\overline{W}(c)$ $P_{п}(c)$ одинаковы для однолинейных составляющих систем и для всей СМО в целом и являются функциями t_0', λ', μ и c.

При исследовании такой СМО возникают значительные трудности, связанные с комбинированным входящим потоком, одним из компонентов которого является регулярный поток, т. е. поток с жестким последействием. Это приводит к тому, что при исследовании такой модели оказываются неприемлемыми классические методы теории массового обслуживания [1].

Данная задача решена на основе интегрального метода [2], при этом решение получается в виде суммы сходящегося ряда, количество членов которого выбирается в соответствии с требуемой точностью вычислений.

Решение задачи начнем с определения вероятности потери регулярной заявки, обозначенной нами в дальнейшем как $P(п)$; $P(п)$ определим как математическое ожидание вероятностей $P_n(п)$; $P_n(п)$ — вероятность множества n несовместных гипотез ($n=0, 1, 2, \ldots$), а именно $P_0(п)$ — вероятность потери регулярной заявки (РЗ) при условии, что предыдущая РЗ не потерялась; $P_{n+1}(п)$ ($n=1, 2, \ldots$) — вероятность потери РЗ при условии, что перед ней потерялись подряд n РЗ, а первая РЗ из серии $n+1$ не потерялась.

Тогда вероятность $P(п)$ будет

$$P(п) = P_0(п)[1-P(п)] + P_1(п)P_0(п)[1-P(п)] + \ldots + P_n(п)P_{n-1}(п)\ldots P_0(п)[1-P(п)],$$

и после преобразований

$$P(п) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(п)P_{n-1}(п)\ldots P_0(п)}{1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(п)P_{n-1}(п)\ldots P_0(п)}. \tag{3}$$

Вероятность $P_n(п)$ определяется как

$$P_n(п) = \sum_{i=0}^{\infty} P_n^i(п)\, P[(n+1)t_0,\ i], \tag{4}$$

где $P_n^i(п)$ — вероятность потери РЗ при условии, что в интервале $(n+1)t_0$ поступило i случайных заявок (СЗ); $P[(n+1)t_0, i]$ — вероятность того, что в интервале $(n+1)t_0$ поступило i СЗ;

$$P[(n+1)t_0,\ i] = \frac{[\lambda(n+1)t_0]^i}{i!} e^{-\lambda(n+1)t_0}. \tag{5}$$

Величина $P_n^i(п)$ определяется как вероятность того, что время пребывания заявки, предшествующей рассматриваемой РЗ, будет больше интервала между этими заявками:

$$P_n^i(\text{п}) = \int\limits_0^{(n+1)t_0} a_n^i(\xi)\left[1 - G_n^{i,i}(\xi)\right] d\xi, \tag{6}$$

где $a_n^i(\xi)$ — плотность распределения интервала между рассматриваемой РЗ и предшествующей СЗ, определяемая как в [3];

$$a_n^i(\xi) = \frac{i}{(n+1)\,t_0}\left[1 - \frac{\xi}{(n+1)\,t_0}\right]^{i-1}; \tag{7}$$

$G_n^{i,i}(\xi)$* — функция распределения времени пребывания i-й СЗ при условии, что в периоде $(n+1)t_0$ выпало i СЗ [2];

$$G_n^{i,i}(x) = \int\limits_0^x \mu e^{-\mu\xi} F_n^{i,i}(x-\xi)\, d\xi; \tag{8}$$

$F_n^{i,i}(x)$ представляет собой функцию распределения времени ожидания i в периоде $(n+1)t_0$ СЗ при условии, что в периоде $(n+1)t_0$ выпало i СЗ [2];

$$F_n^{i,i}(x) = \int\limits_0^{(n+1)t_0} a_n^i(\xi)\, G_n^{i,i-1}(x+\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

В соответствии с (8) и (9) можно записать:

$$G^{i,i-1}(x) = \int\limits_0^x \mu e^{-\mu\xi} F_n^{i,i-1}(x-\xi)\, d\xi;$$

$$F_n^{i,i-1}(x) = \int\limits_0^{(n+1)t_0} a_n^i(\xi)\, G_n^{i\ i-2}(x+\xi)\, d\xi; \tag{10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n^{i,1} = \int\limits_0^{(n+1)t_0} a_n^i(\xi)\, G^0(x+\xi)\, d\xi,$$

где $G^0(x)$ представляет собой функцию распределения времени пребывания первой РЗ (время пребывания РЗ в системе равно времени их обслуживания);

$$G^0(x) = 1 - e^{-\mu x}. \tag{11}$$

Общее выражение для функции распределения $G_n^{i,i}(x)$ времени пребывания СЗ имеет вид

$$G_n^{i,i}(x) = 1 - e^{-\mu x} - \frac{ie^{-\mu x}}{(n+1)\,\mu t_0}$$
$$\left[{}^0b_n^{i,i}\,\mu x + \ldots + \sum_{k+1}^{i-1} {}^kb_n^{i,i}\,\frac{(\mu x)^{k+1}}{(k+1)!}\right]. \tag{12}$$

Общее выражение для функции распределения времени ожидания СЗ представлено в виде

$$F_n^{i,i}(x) = 1 - \frac{ie^{-\mu x}}{(n+1)\mu t_0}\left[{}^0b_n^{i,i}\,\mu x + \ldots + \sum_{k=1}^{i-1} {}^kb_n^{i,i}\,\frac{(\mu x)}{(k+1)!}\right]. \tag{13}$$

Коэффициенты ${}^0b_n^{i,i}$, ${}^1b_n^{i,i}$, ..., ${}^kb_n^{ii}$ из (12) и (13) получаются в процессе рекуррентного определения $G_n^{i,i}(x)$ в соответствии с (10) и являются функциями величин μ, λ, t_0, n и i;

$${}^0b_n^{i,i} = \sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1}\,\frac{J_{l-1}\left[(n+1)\,t_0\right]}{\{(n+1)\,\mu t_0\}^{l-1}}\binom{l-1}{i-1} +$$

---

* Левый верхний индекс i при G_n^{ii} означает число СЗ, выпавших за рассматриваемый промежуток $(n+1)t_0$, а правый верхний индекс i — номер рассматриваемой СЗ из серии i выпавших СЗ в интервале $(n+1)t_0$.

$$+\frac{i}{(n+1)\,\mu t_0}\sum_{j=0}^{i-2}\frac{{}^{j}b_n^{i,i-1}}{j!}\sum_{\substack{l=j+1\\ q=0}}^{\substack{q=i-1\\ l=j+i}}\frac{(-1)^q J_l[(n+1)\,t_0]}{\{(n+1)\,\mu t_0\}^q}\binom{q-1}{i-1}; \tag{14}$$

$${}^{k}b_n^{i,i}=\frac{i}{(n+1)\,\mu t_0}\sum_{j=k-1}^{i-2}\frac{{}^{j}b_n^{i,i-1}}{j!}\sum_{\substack{l=j+1\\ q=0}}^{\substack{q=i-1\\ l=j+i}}\frac{(-1)^q J_l[(n+1)\,t_0]}{\{(n+1)\,\mu t_0\}^q}\binom{q-1}{i-1}$$

$$k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,i-1; \tag{15}$$

$$J_l[(n+1)\,t_0]=l!\left[1-e^{-\mu t_0(n+1)}\sum_{m=0}^{l}\frac{[(n+1)\,t_0\mu]^m}{m!}\right]. \tag{16}$$

Для $m=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,i-1$

$${}^{0}b_n^{i,i-m}=\sum_{l=1}^{i}(-1)^{l-1}\frac{J_{l-1}[(n+1)\,t_0]}{\{(n+1)\,\mu t_0\}^{l-1}}\binom{l-1}{i-1}+$$

$$+\frac{i}{(n+1)\,\mu t_0}\sum_{j=0}^{i-m-2}\frac{{}^{j}b^{i,i-m-1}}{j!}\sum_{\substack{l=j+1\\ q=0}}^{\substack{q=i-1\\ l=j+i}}\frac{(-1)^q J_l[(n+1)\,t_0]}{\{(n+1)\,\mu t_0\}^q}\binom{q-1}{i-1}; \tag{17}$$

$${}^{k}b_n^{i,i-m}=\frac{i}{(n+1)\,\mu t_0}\sum_{j=k-1}^{i-m-2}\frac{{}^{j}b^{i,i-m-1}}{j!}\sum_{\substack{l=j+1\\ q=0}}^{\substack{q=i-1\\ l=j+i+1}}\frac{(-1)^q J_l[(n+1)\,t_0]}{\{(n+1)\,\mu t_0\}^q}\binom{q-1}{i-1};$$

$${}^{0}b_n^{i,1}=\sum_{l=1}^{i}(-1)^{l-1}\frac{J_{l-1}[(n+1)\,t_0]}{[(n+1)\,\mu t_0]^{l-1}}\binom{l-1}{i-1}.$$

На основании полученных выше соотношений можно определить $P(\text{п})$ с любой заданной погрешностью, отбрасывая $P_n(\text{п})$ меньше заданной погрешности.

Перейдем к определению математического ожидания $\overline{W}(c)$ времени ожидания СЗ. При этом применяем ту же методику, что и при определении $P(\text{п})$.

Рассматриваем n гипотез (n — число потерянных подряд РЗ), а в каждой из них — i вариантов (i — число выпавших в интервале $(n+1)t_0$ СЗ).

Функция распределения $F(x)$ времени ожидания СЗ определяется выражением

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)\,[1-P(\text{п})]\,P_0(\text{п})\,P_1(\text{п})\ldots P_n(\text{п}), \tag{18}$$

где

$$F_n(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\left[F_n^{i,j}(x)\right]P\,[(n+1)\,t_0,\,i]\,\frac{1}{i}. \tag{19}$$

Здесь $F_n(x)$ — функция распределения времени ожидания СЗ, выпавших в периоде $(n+1)t_0$ при условии, что в этом периоде подряд потерялось n РЗ, а $F_n^{i,j}$ — функция распределения времени ожидания j-й в периоде $(n+1)t_0$ СЗ при условии, что в периоде $(n+1)t_0$ потерялось подряд n РЗ и выпало i СЗ:

$$F_n^{i,j}(x)=1-\frac{ie^{-\mu x}}{(n+1)\,\mu t_0}\left[{}^{0}b_n^{i,j}\,\mu x+{}^{1}b_n^{i,j}\frac{(\mu x)^2}{2}+{}^{2}b_n^{i,}\,{}^{j}\frac{(\mu x)^3}{6!}+\ldots+{}^{j-1}b_n^{i,j}\,\frac{(\mu x)^j}{j!}\right]. \tag{20}$$

Пользуясь выражениями (18—20) можно определить $F(x)$ с любой заданной точностью, отбрасывая члены ряда, меньшие заданной погрешности.

Математическое ожидание $\overline{W}(c)$ времени ожидания СЗ определится как

$$\overline{W}(c)=\int_{1}^{\infty}\xi\,[F(\xi)]'\,d\xi. \tag{21}$$

Полученные соотношения для $P(\text{п})$ и $\overline{W}(c)$ позволяют найти оптимальное количество приборов c путем определения минимума целевой функции методом цифрового перебора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Л. Саати. Элементы теорий массового обслуживания и ее приложения. М., «Советское радио», 1971.
2. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание, теория и приложения. М., «Мир», 1965.
3. Г. П. Климов. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.

Поступило в редакцию 9 апреля 1973 г.

УДК 519.24

А. М. АЗИЗОВ, В. П. ГОНЧАРУК, А. Н. ГОРДОВ

(Ленинград)

ПРОСТЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ АНАЛИЗЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Точный анализ параметрических эффектов даже для простейших измерительных преобразователей представляет собой сложную задачу [1]. В связи с этим возникает необходимость в применении различных приближенных методов.

В данной работе параметрические эффекты в измерительных преобразователях исследуются двумя достаточно простыми приближенными методами и полученные результаты сравниваются с точными результатами.

Пусть измерительный преобразователь описывается уравнением:

$$\frac{du(t)}{dt} + m(t)\,u(t) = m(t)\,\Theta(t); \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

где $u(t)$ — показания измерительного преобразователя; $\Theta(t)$ — измеряемая характеристика исследуемого объекта; $m(t)$ — зависящий от времени параметр измерительного преобразователя.

Из (1) и (2) получим

$$u(t) = \int_0^t m(\tau)\,\Theta(\tau)\,e^{-\int_\tau^t m(\eta)d\eta}\,d\tau. \tag{3}$$

Пусть $m(t)$ и $\Theta(t)$ представляют собой стационарные нормально распределенные случайные функции.

Для математического ожидания выходной величины имеем

$$M\{u(t)\} = \overline{u(t)} = \int_0^t M\left\{m(\tau)\,\Theta(\tau)\,e^{-\int_\tau^t m(\eta)d\eta}\right\}d\tau. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение трехмерный случайный вектор с компонентами $m(\tau)$, $\Theta(\tau)$, $\mu(\tau)$, где $\mu(\tau) = \int_\tau^t m(\eta)\,d\eta$ также является нормально распределенной случайной функцией.

Пусть $E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — характеристическая функция указанного вектора. Тогда вместо (4) имеем

$$\overline{u(t)} = \int_0^t \left.\frac{\partial^2 E}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_3=i}} d\tau. \tag{5}$$