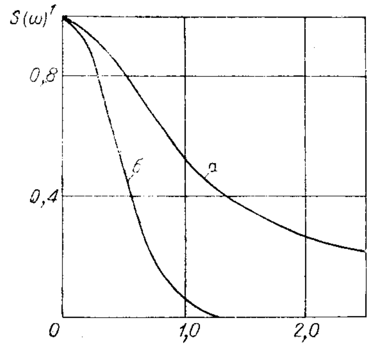

марного спектра сигнала на выходе демодулятора спектр шума, полученный при той же скорости на ламинарном потоке.

Поскольку ламинизировать поток при больших скоростях затруднительно, можно получить спектр шума на ламинарном потоке при малых скоростях, пересчитать его для турбулентного потока с интересующей исследователя средней скоростью и уже затем вычесть из суммарного спектра выходного сигнала ЛДИС. Пересчет спектра делается на основе известного соотношения [1, 2], связывающего скорость ламинарного безградиентного потока и ширину допплеровского спектра:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega_2}. \qquad (4)$$

Учитывая это соотношение, необходимо в соотвествии с (3) полученный на скорости V_1 спектр растянуть по оси частот с коэффициентом $K=V_2/V_1$ и умножить на k.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. Dubnitschev, V. P. Koronkevitch, V. S. Sobolev, A. A. Stolpovsky, E. N. Utkin, Yu. G. Vasilenko. The Development of an Optical Doppler Technique for Measuring Flow Velocities.— Optoelectronics, 1973, N 5.
2. Г. А. Барилл и др. Вопросы теории и практического использования лазерных допплеровских измерителей скорости при исследовании турбулентных потоков.— ЖПМТФ, 1973, № 1.
3. Ю. Н. Дубнищев, А. Г. Сенин, В. С. Соболев. Оценка потенциальных возможностей лазерного допплеровского измерителя скорости потоков жидкостей и газов по точности.— Автометрия, 1972, № 5.
4. S. O. Rice. Statistical Properties of a Sine Wave Plus Random Noise.— Bell System Techn. J., 1948, N 1.

Поступило в редакцию 14 июня 1974 г.

УДК 532.57+621.378.3

В. С. СОБОЛЕВ, С. А. ТИМОХИН
(Новосибирск)

О ВЫБОРЕ КОНЦЕНТРАЦИИ РАССЕИВАЮЩИХ ЧАСТИЦ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ ПОТОКА ЛАЗЕРНЫМ ДОППЛЕРОВСКИМ ИЗМЕРИТЕЛЕМ

При измерении флюктуирующей скорости потока с помощью ЛДИС концентрацию частиц обычно стремятся сделать достаточно малой с тем, чтобы в объеме извлечения информации в любой момент времени в среднем находилось не более одной частицы. Это стремление вызвано тем, что наложение сигналов от нескольких частиц приводит к дополнительным ошибкам измерения скорости из-за флюктуаций фазы выходного сигнала светоприемника. Вместе с тем для удовлетворительного восстановления значений скорости между отсчетами, полученными обработкой сигналов от отдельных частиц, концентрация последних не должна быть слишком малой. Таким образом, к концентрации частиц предъявляются противоречивые требования, что приводит к необходимости принятия компромиссного решения. Рассмотрению этих вопросов и посвящена настоящая работа.

Пусть перекрытие импульсов от k-частиц приводит к помехе $\xi_k(t)$, аддитивной к измеряемой скорости $v(t)$, где $v(t)$ — стационарный случайный процесс. Эта помеха уменьшает точность восстановления $v(t)$. Рассмотрим простейший способ восстановления, при котором измеряемая функция принимается равной значению последнего отсчета, т. е. $v^*(t)=v(t_i)+\xi_k(t_i)$, $t_i\leqslant t<t_{i+1}$. В этом случае ошибка восстановления

$$\xi_k(t)=v^*(t)-v(t)=\Delta(t)+\xi_k(t)t_i\leqslant t<t_{i+1}, \qquad (1)$$

где $\Delta(t)=v(t_i)-v(t)$ — ошибка восстановления процесса $v(t)$ в случае, когда помехи $\xi_k(t)$ нет.

Математическое ожидание ошибки (1) $\overline{\varepsilon_k}=\overline{\xi_k}$, а ее средний квадрат

$$\overline{\varepsilon_k^2(t)} = \overline{\Delta^2(t)} + \overline{\varepsilon}_k^2 + \overline{2\Delta(t)\,\xi_k(t_i)} = \overline{\Delta^2(t)} + \overline{\Delta_\xi^2(t)}, \qquad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \tag{2}$$

где $\overline{\Delta_\xi^2(t)} = \overline{\xi_k^2} + \overline{2\Delta(t)\,\xi_k(t_i)}$ — составляющая среднего квадрата ошибки, возникающая из-за наложения сигналов от k-частиц.

Величина $\overline{\varepsilon_k^2(t)}$ является функцией времени. В качестве оценки ее будем использовать среднее за время $\theta=t_{i+1}-t_i$ между соседними отсчетами значение

$$\overline{\varepsilon_k^2(\theta)} = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \overline{\varepsilon_k^2(t)}\,dt = \Delta^2(\theta) + \Delta_\xi^2(\theta). \tag{3}$$

Усредненное по θ значение среднего квадрата ошибки имеет вид

$$\overline{\overline{\varepsilon_k^2}} = \int_0^\infty \frac{f_k(\theta)}{\theta}\,d\theta \int_0^\theta \overline{\varepsilon_k^2(t)}\,dt = \overline{\Delta_k^2} + \overline{\Delta_{\xi k}^2}. \tag{4}$$

Здесь $f_k(\theta)$ — плотность вероятности случайной величины θ для случая перекрытия сигналов от k-частиц.

Если моменты вхождения частиц в объем извлечения информации образуют пуассоновский процесс с параметром λ, то

$$f_k(\theta) = \lambda\,\frac{(\lambda\theta)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\lambda\theta}. \tag{5}$$

Безусловный средний квадрат ошибки определяется следующим образом:

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_k^2}\,p(k) = \overline{\Delta^2} + \overline{\Delta_\xi^2}, \tag{6}$$

где $p(k)$ — вероятность наложения сигналов от k рассеивающих частиц, равная в каждый момент времени вероятности нахождения в объеме Q извлечения информации k-частиц.

При равномерном распределении частиц в исследуемом потоке

$$p(k) = \frac{(nQ)^k}{k!}\exp\{-nQ\}, \tag{7}$$

где n — среднее число частиц в единице объема (концентрация частиц).

Интенсивность λ зависит как от концентрации частиц, так и от скорости потока. Для потоков с относительно небольшими флюктуациями скорости около среднего значения $\bar v$ можно принять $\lambda \simeq \bar v S n$, где S — площадь нормального к вектору скорости сечения объема рассеяния.

Заметим, что на практике обычно определяется не мгновенная скорость, а ее усредненное за время измерения T значение. При этом аппроксимирующая функция выглядит следующим образом:

$$v^*(t) = \frac{1}{T}\int_{t_i-\frac{T}{2}}^{t_i+\frac{T}{2}} [v(t)+\xi_k(t)]\,dt.$$

В этом случае $v(t_i)$ и $\xi_k(t_i)$ в предыдущих формулах следует заменить на

$$\hat v(t_i) = \frac{1}{T}\int_{t_i-\frac{T}{2}}^{t_i+\frac{T}{2}} v(t)\,dt \quad \text{и} \quad \hat\xi_k(t_i) = \frac{1}{T}\int_{t_i-\frac{T}{2}}^{t_i+\frac{T}{2}} \xi_k(t)\,dt \quad \text{соответственно.}$$

Как следует из (6), ошибка ε^2 может быть представлена в виде суммы двух составляющих. Первая из них равна ошибке восстановления функции $v(t)$ в случае, когда ее значения измеряются без ошибки. Вторая составляющая определяет вклад ошибки, вызванной наложением радиоимпульсов. С ростом концентрации частиц эти составляющие ведут себя по-разному. Первая из них для большинства реальных сигналов убывает, а вторая — растет. Естественно возникает вопрос о выборе такой концентрации, при которой $\overline{\varepsilon^2}$ достигает минимума. Если $v(t)$ — дифференцируемый процесс, то первая составляющая квадрата ошибки в случае усреднения достаточно хорошо описывается приближенным выражением

$$\overline{\Delta^2} \simeq -\sigma^2\rho''(0)\left(\frac{T^2}{4}-\frac{TQ}{2S\bar{v}}+\frac{Q^2}{3S^2\bar{v}^2}\right)-\frac{2}{3}\frac{\sigma^2\rho''(0)\,Q}{S^2\bar{v}^2 n},$$

где $-\sigma^2\rho''(0)$ — дисперсия производной процесса $v(t)$. Ошибка $\xi_k(t)$, а следовательно, и $\overline{\Delta_\xi^2}$ зависит от формы импульсов. Пусть сигнал от одиночной частицы описывается функцией $F(t)\ \cos bvt$ *, где $F(t)$ — огибающая; v — скорость частицы, которую обычно принимают неизменной за время пролета в объеме рассеяния; b — константа. Если пренебречь вероятностью наложения трех и более импульсов, то $\overline{\Delta_\xi^2} \simeq \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{b^2T^2}n^2Q^2$. Тогда

$$\overline{\varepsilon^2} \simeq -\sigma^2\rho''(0)\left(\frac{T^2}{4}-\frac{TQ}{2S\bar{v}}+\frac{Q^2}{3S^2\bar{v}^2}\right)-\frac{2\sigma^2\rho''(0)\,Q}{S^2 n\bar{v}^2}+\frac{2\pi^2n^2Q^2}{b^2T^2}.$$

Отсюда нетрудно найти n_0, при которой средний квадрат ошибки минимален:

$$n_0=\sqrt[3]{\frac{-\sigma^2\rho''(0)\,b^2T^2}{2\pi^2S^2Q\bar{v}^2}}.$$

Из (8) следует, что концентрацию частиц необходимо увеличивать с ростом дисперсии производной измеряемого процесса и уменьшать ее с ростом средней скорости потока.

Если выразить дисперсию производной через спектральную плотность исходного процесса $S_v(t)$, то (8) примет вид

$$n_0=\sqrt[3]{\frac{2b^2T^2\int\limits_0^\infty f^2S_v(f)\,df}{S^2Q\bar{v}^2}}.$$

В частности, если спектр флюктуаций скорости равномерен и простирается до f_0, то

$$n_0=f_0\sqrt[3]{\frac{2b^2T^2S_v(0)}{3S^2Q\bar{v}^2}}.$$

Отсюда следует, что величина n_0 прямо пропорциональна наивысшей частоте спектра. Выражение (9) можно значительно упростить. Действительно, $S_v(0)f_0=\sigma^2$, а $\sigma/v=I$, где I — мера интенсивности турбулентных пульсаций скорости. Умножая числитель и знаменатель (8) на квадрат диаметра пучка света в фокальной области d_Φ, в знаменателе получим

$$S^2d_\Phi^2 \approx Q^2. \qquad (9)$$

Время измерения выберем на порядок меньше интервала $1/2\ f_0$, то есть примем, что $T=\frac{1}{20f_0}$. Теперь рассмотрим произведение bd_Φ. Если используется дифференциальная оптическая схема ЛДИС с гауссовыми пучками, то $b=2kc/F$, а $d_\Phi=16F/kd_{\text{вх}}$, где $k=2\pi/\lambda$; $2c$ — расстояние между пучками на входе оптической схемы ЛДИС, а $d_{\text{вх}}$ — диаметр входных пучков на уровне e^{-2}. Тогда

$$bd_\Phi=\frac{32c}{d_{\text{вх}}}. \qquad (10)$$

Учитывая изложенное выше и подставляя (9), (10) в (8), получим окончательное выражение для подсчета оптимальной концентрации рассеивающих центров

$$n_0\approx\frac{1}{Q}\sqrt{\frac{I^2c^2}{d_{\text{вх}}}};$$

если $Q=5\cdot10^{-3}$ мм^3, $I=0{,}1$ и $c/d_{\text{вх}}=10$, то $n_0=200$ и в объеме Q в среднем должна быть 1 частица.

Поступило в редакцию 3 июня 1974 г.

* C. Greated, T. Durrany. Signal Analisis for Laser Velocimeter Measurements — J. Phys. E, Sci. Jnstr., 1971, v. 4, N 1.