ВЫВОДЫ

Разделение допустимой погрешности образцового прибора на учитываемую и неучитываемую части дает возможность расширить технологический допуск для проверяемого прибора в 1,5 раза по сравнению со случаем, когда погрешность образцового прибора учитывается целиком. Изложенный метод позволяет обосновать технологический допуск при производстве и поверке приборов для произвольного соотношения погрешностей образцового и поверяемого приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Маликов. Основы метрологии. М., Изд-во Комитета стандартов, 1949.
2. Б. И. Швецкий. Электронные измерительные приборы с цифровым отсчетом. Киев, «Техника», 1970.

Поступило в редакцию 18 апреля 1971 г.,
окончательный вариант — 23 ноября 1972 г.

УДК 389 : 51

В. В. ЛЕОНОВ, В. А. ФИРСАНОВ, А. Б. ШАЕВИЧ

(Свердловск)

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ГРАДУИРОВОЧНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Большой класс автоматических измерений основан на градуировании — установлении зависимости между двумя величинами по экспериментальным данным и ее использовании. Установление подобной зависимости является типичной задачей и при обработке результатов измерений.

Наиболее вероятные значения характеристик зависимости оцениваются с помощью специальных приемов, например методом наименьших квадратов. Однако в этой области имеются и другие практически важные задачи. Часто необходимо установить, какие погрешности средств измерений, применяемых для нахождения параметров градуировочной зависимости, могут быть допущены, если вначале задана ее погрешность. Эта задача важна для разработчиков средств измерений (особенно массовых, включая автоматические), поскольку как недостаточная, так и избыточная точность экономически не оправданы.

При определении градуировочной кривой разыскивается функция $y(x;\ a_0, a_1, \ldots, a_m)$, наилучшим образом (в смысле заданного критерия) аппроксимирующая экспериментальные результаты, заданные набором пар $\{x_i, y_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$. Обычным подходом к решению таких задач является применение метода наименьших квадратов (МНК), который при соблюдении известных условий [1] дает точное решение задачи. Хотя эти условия в практике обработки результатов измерений выполняются сравнительно редко, приближенное решение достаточно близко к точному и, как правило, вполне пригодно для целей применения.

Согласно МНК, решение минимизирует величину

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i [y(x_i;\ a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i]^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{1}$$

и определяется из следующих уравнений:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a_j} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Решение системы уравнений (2) дает оценки $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и тем самым искомую градуировочную функцию $y(x;\ a_0, a_1, \ldots, a_m)$.

Поскольку $y(x;\ a_0, a_1, \ldots, a_m)$ линейна по параметрам a_j, то и решение системы (2) также линейно по y_i. Следовательно, градуировочную функцию можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i(x)\, y_i, \tag{3}$$

где веса p_i заданы, коэффициенты $\alpha_i(x)$ известны, элементарно выражаются через x_i и не зависят от y_i. Отметим, что определение коэффициентов в $a_i(x)$ почти не требует дополнительных вычислений. Легко видеть, что они получаются после подстановки коэффициентов a_i в явное выражение для функции $y(x;\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m)$ и объединения членов при y_i. Из (3) находим дисперсию градуировочной функции

$$Dy(x)=\sum_{i,j} p_i p_j \alpha_i(x)\,\alpha_j(x)\operatorname{cov}(y_i,\ y_j). \tag{4}$$

Если погрешности y_i взаимно независимы, то

$$Dy(x)=\sum_{i=1}^{n} P_i^2\alpha_i^2(x)\,Dy_i. \tag{5}$$

В том случае, когда p_i выбраны так, что

$$p_i Dy_i=\sigma^2, \tag{6}$$

формула (5) принимает вид

$$Dy(x)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n} p_i\alpha_i^2(x). \tag{7}$$

При неизвестных дисперсиях измерений величины Dy_i оцениваются в предположении равноточности результатов

$$Dy_i=\overline{Dy}=\frac{n}{n-m-1}S^2. \tag{8}$$

Для иллюстрации изложенного способа рассмотрим часто встречающийся при построении градуировочных зависимостей случай линейной связи величин, т. е.

$$y(x;\ a_0,\ a_1)=a_0+a_1x$$

Определяя методом наименьших квадратов параметры a_0 и a_1 и подставляя их в (9), найдем, что коэффициенты $(\alpha_i x)$ в (3) имеют вид

$$\alpha_i(x)=\left[1+\frac{(x-\bar{x})(x_i-x)}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\right], \tag{10}$$

где
$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{и} \quad \overline{x^2}=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2.$$

Подставляя (10) в (4), получаем выражение для дисперсии градуировочной прямой

$$Dy(x)=\sum_{i,j} p_i p_j\left[1+\frac{(x-\bar{x})(x_i-\bar{x})}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\right]\left[1+\frac{(x-\bar{x})(x_j-\bar{x})}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\right]\operatorname{cov}(y_i,\ y_j). \tag{11}$$

Если погрешности y_i взаимно независимы и веса выбраны в соответствии с (6), то

$$Dy(x)=\sigma^2\left[1+\frac{(x-\bar{x})^2}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\right]. \tag{12}$$

Для равноточных измерений σ^2 находится по формулам (8) и (1) так, что

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\overline{Dy}.$$

Отметим, что задача отыскания погрешности градуировочной функции неоднократно решалась и изложена, например в [1—3], где результат (7) был получен другими способами.

В практике построения градуировочных зависимостей часто встречается случай, когда точки x_i расположены на оси абсцисс равномерно через произвольный, но постоянный интервал Δ

$$x_i=\bar{x}+\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\Delta \tag{13}$$

так, что полный диапазон изменения величин x_i равен $2R$, где

$$2R=(n-1)\Delta. \tag{14}$$

Подставляя (13) в (12) и выражая $|x-x|$ в единицах R так, что

$$|x-\bar{x}|=\beta R, \tag{15}$$

для равноточных измерений получаем

$$Dy(\beta) = \frac{\overline{Dy}}{n}\left(1 + 3\frac{n-1}{n+1}\beta^2\right). \qquad (16)$$

Из формулы (16) следует, что внутри диапазона $2R(\beta \leqslant 1)$ градуировочная кривая определена лучше, чем отдельные точки, использованные для ее построения. В частности, для середины интервала при $\beta = 0$ имеем обычный результат

$$Dy(0) = \frac{1}{n}\overline{Dy}. \qquad (17)$$

При $\beta = 1$, т. е. для края диапазона, из (16) находим

$$Dy(1) = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}\overline{Dy}. \qquad (18)$$

Следует отметить, что формула (16) позволяет оценить погрешность значений, полученных при экстраполяции градуировочной прямой. Именно, если требуется, чтобы при экстраполяции выполнялось неравенство $Dy(\ ) \leqslant \gamma\overline{Dy}$, то для β имеем условие

$$\beta \leqslant \sqrt{\frac{(\gamma n - 1)(n+1)}{3(n-1)}}. \qquad (19)$$

Соотношение (16) позволяет произвести оценку допустимой погрешности средств измерений, если известны требования к погрешности градуировочной функции, а также количество точек n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
2. Д. Худсон. Статистика для физиков. М., «Мир», 1970.
3. Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1965.

Поступило в редакцию 13 июля 1972 г.,
окончательный вариант — 11 сентября 1973 г.

УДК 681.325.3

Ю. Д. ДОЛИНСКИЙ

(Ленинград)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УМЕНЬШЕНИЯ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С МАЛЫМИ ВНУТРЕННИМИ ПОМЕХАМИ

Наиболее радикальным способом уменьшения инструментальной погрешности аналого-цифрового преобразователя, порожденной его внутренними помехами (ВП), является статистическая обработка результатов преобразования (РП), заключающаяся в вычислении среднего результатов отдельных преобразований (цифровое осреднение) [1]. Для выполнения этой операции необходимо дополнить преобразователь запоминающим устройством и сумматором, что не всегда возможно или целесообразно. Однако цифровое осреднение — не единственный способ повышения точности преобразования. В данной статье исследуется возможность уменьшения инструментальной погрешности путем многократного сравнения преобразуемого сигнала (ПС) с эталонами.

При исследовании используется идеализированная модель безынерционного преобразователя, на входе которого действует сумма ПС и выраженных в масштабе этого сигнала ВП, причем эти слагаемые считаются, аналогично [2], случайными величинами. ВП предполагаются малыми; под этим понимается, что ширина области нечувствитель-