мости запоминания программы вычислений можно рекомендовать использовать в данном случае ОЗУ емкостью 256×4 бит. Быстродействие устройства при этом будет составлять 30 мс, что хорошо согласуется со временем вывода результатов вычисления на регистрирующее устройство.

Задача решалась на ЭВМ М-220, имеется программа на языке АЛГОЛ-60.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Катковник, М. Б. Улицкий. Ортонормированные решетчатые полиномы в задаче аппроксимации функций многих переменных.— В сб. «Механика и процессы управления. Вычислительная математика». Труды ЛПИ, Л., 1971, № 318.
2. В. Я. Катковник, М. Б. Улицкий. Об одном классе алгоритмов осреднения и численного дифференцирования функций многих переменных в задачах обработки данных эксперимента.— Труды ВНИИ. Л., Научприбор, 1972, № 1.
3. В. И. Борисов. Проблемы векторной оптимизации.— В сб. «Исследование операций». М., «Наука», 1972.
4. L. A. Zadeh. Optimality and Non-Scalarvalued Perfomence Criteria.— IEEE Trans., 1968, v. AC-8, N 1.
5. В. Л. Волкович. Методы принятия решений по множеству критериев оптимальности.— В сб. «Сложные системы управления», вып. 1. Киев, «Наукова думка», 1968.
6. Ю. А. Зак. Модели и методы построения компромиссных планов в задачах математического программирования с несколькими целевыми функциями.— Кибернетика, 1972, № 4.
7. А. Фиакко, Г. Мак-Кормик. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М., «Мир», 1972.
8. H. E. Darling. Conductivity of Sulfuric Acid Solutions.—J. of Chem. and Engin. Data, 1964, v. 9, N 3.

Поступила в редакцию 21 февраля 1973 г.

УДК 517.948.32

В. П. ДИДЕНКО, Н. Н. КОЗЛОВ

(Киев)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ

В работе рассматривается регуляризация некорректных задач в случае, когда областью определения оператора является негативное пространство. В частности, такие задачи возникают при синтезе оптимальных фильтров для оперативной обработки результатов измерений, когда характеристики входных сигналов определяются в процессе обработки [1]. Аналогичная ситуация имеет место и при идентификации объектов.

В этих конкретных условиях возникает необходимость в решении интегрального уравнения первого рода:

$$Au \equiv \int_0^T R(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau = f, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Класс допустимых решений $u(t)$ может содержать обобщенные функции типа δ-функции Дирака, а также их производные, которые являются, как известно, элементами негативных пространств.

Введем необходимые обозначения. Через H_0 обозначим полное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot\cdot\cdot)_{H_0}$ и нормой $\|\cdot\|_{H_0}$.

Пусть в H_0 можно указать всюду плотное линейное множество H_+, являющееся полным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(.,.)_{H_+}$; $\|\cdot\|_{H_+}$ — норма в H_+.

Следуя [2], примем H_+ в качестве позитивного пространства и построим по H_+ и H_0 негативное пространство H_- с нормой $\|\cdot\|_{H_-}$ и скалярным произведением $(.,.)_{H_-}$.

Существует изометрический оператор I, переводящий все H_- на H_+, и ему обратный I^{-1}, переводящий все H_+ на H_-. Для элементов $\alpha \in H_-$ и $\beta \in H_+$ определена билинейная форма $(\alpha, \beta)_0$, совпадающая при $\alpha \in H_0$ со скалярным произведением в H_0, причем

$$(u, v)_{H_-} = (u, Iv)_0 = (Iu, v)_0 = (Iu, Iv)_{H_+}; \quad u, v \in H_-; \tag{1}$$
$$(\psi, \varphi)_{H_+} = (I^{-1}\psi, \varphi)_0 = (\psi, I^{-1}\varphi)_0 = (I^{-1}\psi, I^{-1}\varphi)_{H_-}; \quad \psi, \varphi \in H_+.$$

В качестве H_0, в частности, можно принять L_2 — пространство интегрируемых с квадратом функций; H_+ и H_- — соответственно пространство Соболева W_2^l а и ему сопряженное пространство W_2^{-l}. В одномерном случае и при $l=1$ названный выше изометрический оператор имеет вид $I^{-1}u = -\frac{d^2u}{dt^2} + u$, $u \in W_2^1$, а оператор I является интегральным с ядром функций Грина $G(t, \tau)$ для выражения $-\frac{d^2u}{dt^2} + u$ с граничными условиями $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=T} = 0.$

Функция Грина в этом случае определяется формулой

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{e^\tau + e^2e^{-\tau}}{2e^2 - 2}(e^t + e^{-t}), & t \leqslant \tau; \\ \dfrac{e^\tau + e^{-\tau}}{2e^2 - 2}(e^t + e^2e^{-t}), & t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Скалярное произведение в W_2^{-1} определяется как

$$(u, v)_{H_-} = \int_0^T\int_0^T G(t, \tau)\, u(\tau)\, v(t)\, d\tau dt.$$

На основании теорем вложения Соболева при $l > \frac{n}{2}$ (n — размерность пространства) в W_2^{-l} входит обобщенная функция типа δ-функции и ее производные до $l - \frac{n}{2}$ порядка.

Поставим задачу о регуляризации уравнения вида

$$Au = f, \tag{2}$$

где $u \in H_-$, $f \in H_0$; A — вполне непрерывный оператор из H_- в H_0. В частности, если выполнено условие

$$\int_0^T \|R(t_1\tau)\|_{W_2^l} dt < \infty,$$

то интегральный оператор $Au \equiv \int_0^T R(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau$ вполне непрерывен из W_2^{-l} в L_2.

Использование изометрических операторов позволяет получить численную реализацию задач регуляризации в случае, если областью определения оператора является негативное пространство. Предположим, что существует решение $\bar{u}$ уравнения (2) $(\bar{u} \in H_-)$ и оно определено однозначно заданием совокупности точных исходных данных $\{f, A\}$.

Рассмотрим по [3] сглаживающий параметрический функционал

$$\Phi^\alpha(u) = \|Au - f\|^2_{H_0} + \alpha \|u - u_0\|^2_{H_-}. \tag{3}$$

Здесь $u \in H_-$, u_0 — произвольный фиксированный элемент из H_-, $\alpha > 0$ — параметр. Пусть u^α доставляет минимум функционалу (3) при фиксированном $\alpha > 0$. Осуществляя вариацию в виде $u^\alpha + \lambda z$ (λ — число, z — произвольный элемент из H_-) и приравнивая к нулю производную от $\varphi(\lambda) = \Phi^\alpha(u^\alpha + \lambda z)$ по λ, получаем для функционала (3) уравнение Эйлера

$$A^*Au^\alpha + \alpha I u^\alpha = A^*f + \alpha I u_0, \tag{4}$$

где A^* — оператор, сопряженный к A, действующий из H_0 в H_+. В случае если A — интегральный оператор, прямое использование операторов I и I^{-1} в виде

$$A^*AI^{-1}Iu^\alpha + \alpha I u^\alpha = A^*f + \alpha I u_0$$

не приводит к получению уравнения Фредгольма второго рода. Дело в том, что оператор I^{-1} содержит операцию дифференцирования, по крайней мере, второго порядка, которую невозможно «перебросить» на ядро интегрального оператора A^*A. Поэтому поступим следующим образом. Используя (4), образуем для произвольного $z \in H_-$ билинейную форму

$$(A^*Au^\alpha, z)_0 + \alpha(Iu^\alpha, z)_0 = (A^*f, z)_0 + \alpha(Iu_0, z)_0. \tag{5}$$

Учитывая (1), для первого слагаемого левой части из (5) получаем

$$(A^*Au, z)_0 = (u, A^*Az)_0 = (Iu, I^{-1}A^*Az)_0 = ((I^{-1}A^*A)^*Iu, z)_0.$$

С учетом последнего и обозначая $Iu^\alpha = v^\alpha$, получим из (5) уравнение

$$(I^{-1}A^*A)^*v^\alpha + \alpha v^\alpha = A^*f + \alpha I u_0. \tag{6}$$

Оператор $(I^{-1}A^*A)^*$ вполне непрерывен из H_+ в H_+. Поэтому (6) является операторным уравнением, для которого справедлива теория уравнений Фредгольма второго рода. Из (5) непосредственно следует, что однородное уравнение, соответствующее (6), имеет лишь тривиальное решение. В самом деле, пусть имеется два решения u_1^α и u_2^α. Тогда их разность ω^α удовлетворяет условию

$$(A^*A\omega^\alpha, z)_0 + \alpha(I\omega^\alpha, z)_0 = 0.$$

Полагая здесь $z = \omega^\alpha$, получим $\omega^\alpha = 0$, т. е. u_1^α совпадает с u_2^α.

Последовательность гладких функций $\{v^\alpha\}$ определяет $\{u^\alpha\}$ по формуле

$$u^\alpha = I^{-1}v^\alpha. \tag{7}$$

Рассуждая так же, как и в [4], можно показать, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\|u^{\alpha}-\bar{u}\|_{H_-}=0,$$

где $\bar{u}$ — точное решение уравнения (2).

В нашем случае на основании (1) имеем

$$\|v^{\alpha}-I\bar{u}\|_{H_+}=\|u^{\alpha}-\bar{u}\|_{H_-},$$

поэтому справедливо

$$\lim_{\alpha\to 0}\|v^{\alpha}-I\bar{u}\|_{H_+}=0.$$

Обозначим теперь через f_δ функцию, для которой

$$\|f_\delta-f\|_{H_0}\leqslant\delta,$$

а через A_h — семейство вполне непрерывных операторов, область определения которых совпадает с областью определения оператора A и имеет место

$$\|A_h-A\|_{H_-\to H_+}=\xi(h)\to 0,\quad h\to 0.$$

По $\{A_h f_\delta\}$, полученным из эксперимента, аналогично предыдущему строим сглаживающий функционал и также получаем семейство уравнений вида

$$\left(I^{-1}A_h^{*}A_h\right)^{*}v_{\delta h}^{\alpha}+\alpha v_{\delta h}^{\alpha}=A_h^{*}f_\delta+\alpha I u_0. \tag{8}$$

Можно показать [4], что если одновременно

$$\frac{\xi(h)}{\alpha}\to 0,\quad \frac{\delta^2}{\alpha}\to 0,\quad \alpha=\alpha(\delta,h)\to 0$$

(например, в качестве α можно взять $\alpha=\sqrt{\xi(h)+\delta^2}$), то для последовательности $\{v_{\delta h}^{\alpha}\}$ справедливо

$$\|v_{\delta h}^{\alpha}-\bar{v}\|_{H_+}=\|I^{-1}v_{\delta h}^{\alpha}-I^{-1}\bar{v}\|_{H_-}=\|u_{\delta h}^{\alpha}-\bar{u}\|_{H_-}\to 0.$$

Таким образом, регуляризация задачи (2) эквивалентна нахождению решений параметрического семейства уравнений (8).

Определение $v_{\delta h}^{\alpha}$ на сетке значений параметра α может быть осуществлено, в частности, как и в [4]. Для этого примем первоначально

$$Iu_0=\hat{v}_{\delta h}^{\alpha}=\left(\alpha E+\left(I^{-1}A_h^{*}A_h\right)^{*}\right)^{-1}A_h^{*}f_\delta, \tag{9}$$

где E — единичный оператор, u_0 — элемент из (3). Далее подставим (9) в уравнение (8), тогда

$$v_{\delta h}^{\alpha}=\left(\alpha E+\left(I^{-1}A_h^{*}A_h\right)^{*}\right)^{-1}\left[A_h^{*}f_\delta+\alpha\left(\alpha E+\left(I^{-1}A_h^{*}A_h\right)^{*}\right)^{-1}A_h^{*}f_{\delta},\right],$$

откуда

$$v_{\delta h}^{\alpha} = \hat{v}_{\delta h}^{\alpha} - \alpha \frac{d\hat{v}_{\delta h}^{\alpha}}{d\alpha}.$$

Пусть параметр α меняется дискретно:

$$\alpha = \alpha_h = \alpha_0 \tau^h, \quad h = 0, 1, 2, \ldots; \quad 0 < \tau < 1.$$

Выражение (9) может быть приближенно переписано в форме

$$v_{\delta h}^{\alpha_h} \approx \frac{\hat{v}_{\delta h}^{\alpha_{h+1}} + \tau \hat{v}_{\delta h}^{\alpha_h}}{1 - \tau},$$

Формулы (9), (10) и (7) указывают алгоритм численного нахождения регуляризующего семейства $\{u_{\delta h}^{\alpha}\}$ задачи (2). Вычисление $\hat{v}_{\delta h}^{\alpha}$ по формуле (9) возможно любым методом [5].

Отметим также, что применение изометрических операторов I и I^{-1} позволяет получить регуляризацию задачи (2) на основе прямого использования вариационных методов. Справедлива

Теорема. Пусть H_+ сепарабельно и выполнено

$$\frac{\xi(h)}{\alpha} \to 0, \quad \frac{\delta^2}{\alpha} \to 0, \quad \alpha = \alpha(\delta, h) \to 0,$$

тогда отыскание регуляризирующего семейства $\{u_{\delta h}^{\alpha}\}$ для задачи (5) эквивалентно нахождению минимизирующей последовательности для функционала

$$F^{\alpha}(u) = (u, B_h^{\alpha} u)_0 - 2(u, A_h^* f_\delta)_0,$$

где $\quad B_h^{\alpha} u = (A_h^* A_h + \alpha I) u.$

Очевидно, что

$$(u, B_h^{\alpha} v)_0 = (B_h^{\alpha} u, v)_0; \quad (u, B_h^{\alpha} u)_0 \geqslant \alpha \|u\|_{H_-}^{\alpha},$$

где u и v из области определения оператора B_h^{α}.

Здесь $(.,.)_0$ — билинейная форма. Однако можно доказать, что здесь применим метод Ритца. Так, в случае если H_+ сепарабельно, то H_- тоже сепарабельно, и приближенные решения, по Ритцу, находятся в виде

$$u_n^{\alpha(\delta,h)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha(\delta,h)} \varphi_k,$$

где φ_k — полная последовательность из H_-; a_k — постоянные, определяемые из системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (B_h^{\alpha} \varphi_k, \beta_m)_0 a_k^{\alpha(\delta,h)} = (A_h^* f_\delta, \ \varphi_m)_0, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, определена регуляризация задачи (2) прямым методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1969.
2. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, «Наукова думка», 1965.
3. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 3.
4. В. А. Морозов. О регуляризирующих семействах операторов.—В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 8. М., МГУ, 1967.
5. Л. В. Канторович, В. В. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 6 июня 1973 г.

УДК 621.391.233 : 621.398.08

О. Ю. ГЕРТИГ

(Ленинград)

ИНФОРМАТИВНОСТЬ ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКИХ СООБЩЕНИЙ С ВОЗМУЩЕННЫМИ КООРДИНАТАМИ ВРЕМЕНИ

В современном представлении пространственно-временные меры сообщений являются зависимыми, т. е. изменения пространственных координат влекут за собой изменения временной координаты, и наоборот. Связь погрешности оценки временной координаты сигнала с величиной случайных (шумовых) искажений его пространственных характеристик исследована достаточно подробно. Значительно меньше внимания уделено обратному влиянию погрешности оценки временной координаты на величину пространственных (информационных) координат процессов. Существующими теориями не учитываются возмущения временной координаты процессов, приводящие к нарушению информационного тождества измеряемой функции и принятого сообщения. В то же время диалектика постоянного повышения точности информационно-измерительных систем, малое время общего цикла измерений, высокая скорость изменения контролируемых координат объектов и сложный путь доставки данных потребителю обусловливают необходимость установления зависимости между величиной случайных возмущений временных координат сигнала и точностью восстановления сообщений.

Определение этой зависимости удобно произвести с помощью аппарата дискретного преобразования непрерывных функций [1]. Характеристикой связи временных и пространственных координат сообщений может служить удельная информативность сигналов в канале с нарушениями этих координат, т. е. количество информации, переносимое элементом сигнала.

Пусть сообщение информационно-измерительной системы представляет собой некоторую реализацию случайной функции на интервале наблюдения $0 - T$.

Теория дискретного преобразования позволяет представить отрезок стационарной случайной функции $x(t)$, заданной на интервале $0 - T$ суммой конечного числа n элементов разложения, выбранных по некоторому правилу:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\, \varphi(t - t_i), \qquad (1)$$