АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1974

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.371.7.019.3:62—50

В. Н. ИВАНОВ
(Ленинград)

К ВОПРОСУ О СООТНОШЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ КРИТЕРИЕВ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Среди известных в настоящее время критериев для оценки точности как отдельных средств измерений, так и сложных измерительных информационных систем можно выделить три основных критерия, получивших наиболее широкое распространение, а именно: дисперсионный критерий [1], информационной критерий (энтропийное значение погрешности), предложенный П. В. Новицким [2, 3], и квантильное значение погрешности или интерквантильный промежуток [4].

Каждый из перечисленных критериев не может служить универсальной характеристикой, полностью описывающей свойства погрешности как случайной величины в отличие, например, от закона распределения.

Кроме того, все эти три критерия являются в некотором смысле попарно независимыми, т. е. значение одного из них не позволяет достаточно хорошо оценивать точность данного средства измерения по другим критериям*.

Целью настоящей работы является установление некоторых соотношений связи между тремя перечисленными критериями, которые позволили бы при фиксированных значениях любых двух из них достаточно точно оценивать значение третьего.

Для нахождения этой связи будем считать, что закон распределения погрешности средств измерений задан плотностью распределения вероятностей $f(\Delta)$.

Положим для простоты систематическую составляющую погрешности $\overline{\Delta}$, равной нулю, и введем функцию $\varphi(\Delta)$ вида

$$\varphi(\Delta)\begin{cases}1, & |\Delta| \leqslant k\sigma;\\ 0, & |\Delta| > k\sigma,\end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma^2 = \int \Delta^2 f(\Delta) d\Delta$—дисперсия погрешности Δ, $k>0$ — произвольная константа. Тогда для симметричного относительно нуля интерквантильного промежутка $\overset{\circ}{I}_\alpha = [-k\delta, k\delta]$ можно записать

$$\int \varphi(\Delta) f(\Delta) d\Delta = \alpha;\ \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{2}$$

Рассмотрим случайную величину Δ_1, имеющую нормальный закон распределения $p(\Delta_1)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_1^2 = \sigma^2$. Энтропия

$$H(\Delta_1) = \frac{1}{2} \ln 2\pi e\sigma^2.$$

Тогда, как нетрудно показать, разность $H(\Delta_1) - H(\Delta)$ можно представить в виде

$$H(\Delta_1) - H(\Delta) = \int f(\Delta) \ln \frac{f(\Delta)}{p(\Delta)} d\Delta = I. \tag{3}$$

Интеграл в правой части (3) всегда существует в силу нормальности $p(\Delta)$ и хорошо известен как функционал различающей информации Кульбака [6].

Рассмотрим следующую вариационную задачу. Пусть требуется найти плотность распределения вероятностей $f(\Delta)$, доставляющую минимум функционалу различающей

* Следует заметить, что при использовании дисперсионного критерия возможно путем применения неравенства Чебышева и привлечения понятия ε-энтропии [5] получить указанные оценки, однако весьма приближенный характер последних затрудняет их широкое использование в практических задачах.

информации I при ограничениях:

$$\int \varphi(\Delta) f(\Delta)\, d\Delta = \alpha; \qquad (4)$$
$$\int f(\Delta)\, d\Delta = 1.$$

Обозначая $\frac{f(\Delta)}{p(\Delta)}$ через $\omega(\Delta)$ и используя метод множителей Лагранжа, для функции $\omega_0(\Delta)$, минимизирующей функционал (3), получим следующее выражение:

$$\omega_0(\Delta) = \exp\{-(\lambda\varphi + \mu\Delta^2 + \nu + 1)\}. \qquad (5)$$

Значение констант λ, μ и ν можно определить с учетом (4) и (5) как корни системы уравнений:

$$\begin{aligned} &e^{-(\nu+1)}\left(\alpha^* e^{-\lambda} + (1-\alpha^*)\right) = \sqrt{\mu_1};\\ &\alpha^* e^{-(\nu+1+\lambda)} = \alpha\sqrt{\mu_1};\\ &e^{-\left(\nu+\lambda+1+\frac{k^2}{2}\mu_1\right)}\left(1-e^{-\lambda}\right) = (1-\mu_1)\sqrt{2};\\ &\alpha^* = 2\Phi\left(k\sqrt{\frac{\mu_1}{2}}\right), \end{aligned} \qquad (6)$$

где
$\mu_1 = 2\sigma^2\mu + 1$; $\Phi(z)$ — функция Лапласа. Тогда для минимального значения I, соответствующего $\omega_0(\Delta)$, получим

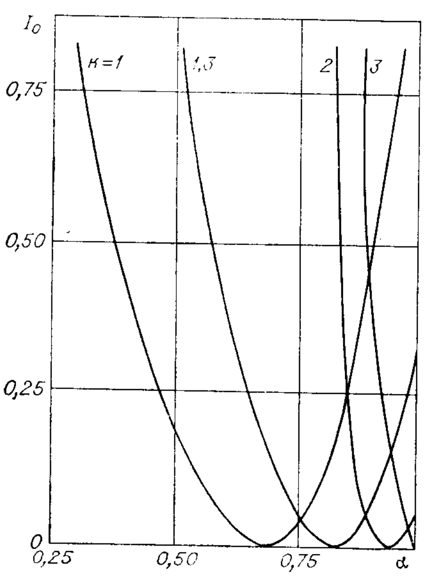
$$I_0 = \alpha \ln\frac{\alpha}{\alpha^*} + (1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{1-\alpha^*} + \frac{1}{2}\left(\ln\mu_1^* - \mu_1^* + 1\right). \qquad (7)$$

Здесь μ_1^* — решение следующего трансцендентного уравнения:

$$\frac{\alpha - \alpha^*}{\alpha^*(1-\alpha^*)}\exp^{-\frac{k^2}{2}\mu_1} = (\mu_1 - 1)\,k\sqrt{\frac{\mu_1}{2}}. \qquad (8)$$

На рисунке представлены графики зависимости I_0 как функции α для некоторых значений k, полученные в результате численного решения (8).

Выражение (7) позволяет, учитывая экстремальный характер I_0, выразить соотношение между тремя интересующими нас величинами σ^2, α и $H(\Delta)$ в виде неравенства



$$\frac{1}{2}\ln 2\pi e\sigma^2 - H(\Delta) \geqslant \alpha\ln\frac{\alpha}{\alpha^*} + (1-\alpha)\times$$
$$\times \ln\frac{1-\alpha}{1-\alpha^*} + \frac{1}{2}\left(\ln\mu_1^* - \mu_1^* + 1\right). \qquad (9)$$

Пользуясь этим неравенством или графиком (см. рисунок), можно, зная значения двух из входящих в него характеристик, оценить значение третьей. Так, например, по известным значениям дисперсии σ^2 и энтропии погрешности $H(\Delta)$ неравенство (9) дает возможность, изменяя величину k, определить верхнюю границу ширины интерквантильного промежутка для любого, что весьма существенно, уровня α. Кроме того, выпуклость функционала различающей информации I позволяет при использовании неравенства (9) ориентировать получаемые оценки характеристик точности средств измерений на «наихудший» случай распределения погрешности, что очень важно при практическом их использовании.

Пример. 1. Пусть случайная составляющая погрешности средств измерений характеризуется дисперсией $\sigma^2 = 1$ и энтропией $H(\Delta) =$

$=2$ дв. ед. Тогда для I имеем

$$I=\frac{1}{2}\ln 2\pi e-2\ln 2=0{,}05.$$

Из графика рисунка получаем, что (для данного средств измерений в рассматриваемом случае) интервал [—2,2] содержит в себе не менее 89% значений погрешности.

Пример 2. Известно, что случайная составляющая погрешности средств измерений с вероятностью $\alpha=0{,}95$ лежит в пределах $\pm1{,}5$. Дисперсия погрешности $\sigma^2=1{,}33$. В этом случае

$$k=\frac{2{,}25}{1{,}69}=1{,}3.$$

По графику рисунка находим для $\alpha=0{,}95$ и $k=1{,}3$; $I=0{,}16$, откуда для энтропии погрешности данного средства измерений получаем оценку

$$H(\Delta)\leqslant\frac{\frac{1}{2}\ln 2\pi\, e\sigma^2-I_0}{\ln 2}=2{,}3\text{ дв. ед.},$$

что соответствует энтропийному значению погрешности $\Delta_э=2{,}02$. Полученный результат легко можно распространить на случай многоканальных измерений. Так, например, если определить, аналогично (2), величину α как

$$\alpha=P\{(\Delta-\overline{\Delta})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\Delta-\overline{\Delta})\leqslant k^2\},$$

то неравенство (9) приобретает вид:

$$\frac{1}{2}\ln(2\pi e)^m\det\sum-H(\Delta)\geqslant\alpha\ln\frac{\alpha}{\alpha^*}+$$
$$+(1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{1-\alpha^*}+\frac{m}{2}\left(\ln\mu_1^*-\mu_1^*+1\right),$$

где Σ — ковариационная матрица погрешностей в отдельных каналах измерения; m — размерность вектора результатов измерения (число каналов измерения) $(\ \ )^{\mathrm{T}}$ — оператор транспонирования.

В частном случае при $m=1$ последнее неравенство прямо переходит в (9) и, следовательно, полученные соотношения дают возможность единым образом оценивать показатели точности как отдельных средств измерений, так и многоканальных измерительных инфомационных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Земельман, В. П. Кузнецов, А. П. Кнюпфер. О методах нормирования метрологических характеристик измерительных устройств.— Измерительная техника, 1969, № 1, 2, 3.
2. П. В. Новицкий. Основы информационной теории измерительных устройств. Л., «Энергия», 1968.
3. Н. М. Пидорин. О нормировании точности измерений на основе информационных критериев.— Измерительная техника, 1968, № 5.
4. Г. Н. Солопченко. Квантили распределения погрешности как показатель точности измерительных приборов.— В сб.: Тезисы докладов 7-й Всесоюзной конференции «Кибернетические методы в теории и практике измерений». Л., 1970.
5. А. Н. Колмогоров. Теория передачи информации. М., Изд-во АН СССР, 1956.
6. С. Кульбак. Теория информации и статистика. М., «Наука», 1967.

Поступило в редакцию 30 января 1973 г.
окончательный вариант — 28 января 1974 г.