А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1974

АВТОМАТИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 007 : 62

В. Н. ИВАНОВ
(Москва)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УСКОРЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Одна из основных задач натурных испытаний, физического или математического моделирования динамических систем заключается в том, чтобы определить вероятностные характеристики (в частности моменты распределения) случайных выходных координат системы при воздействии внешних и внутренних случайных возмущений. Для достаточно сложных систем с большим числом возмущений разнообразной физической природы такая задача обычно решается методом статистических испытаний системы. Известно [1], что при этом погрешность оценки вероятностных характеристик исследуемых координат пропорциональна величине дисперсии их рассеивания и обратно пропорциональна числу экспериментов n. При повышении требований к точности оценки необходимый объем статистических испытаний довольно быстро растет, что не всегда приемлемо с точки зрения продолжительности испытаний или материальных затрат на их проведение. С целью улучшения сходимости статистических оценок и, как следствие этого, уменьшения требуемого числа экспериментов в режиме испытаний (оценки характеристик) рассеивание выходных координат системы может быть частично уменьшено заменой отдельных случайных возмущений эквивалентными воздействиями [2]. Такой режим отличается от режима нормальной эксплуатации системы тем, что в эксперименте эквивалентные воздействия имитируются неслучайным образом пропорционально среднеквадратическим отклонениям действительных случайных возмущений. Необходимые же значения среднеквадратических отклонений оказываются обычно известными к моменту испытаний всей системы по результатам предшествующих автономных или лабораторных испытаний ее элементов.

Рассмотрим способ задания эквивалентных воздействий при испытаниях и условия, когда их введение оказывается целесообразным, и оценим получаемый при этом выигрыш в объеме экспериментов по сравнению с методом статистических испытаний.

Центрированным значениям случайных возмущений в системе, подлежащих в процессе испытаний эквивалентной замене, поставим в соответствие совокупность независимых случайных величин $\overline{V}=\{V_1, \ldots, V_m\}$. К такому виду приводятся случайные начальные условия, параметры, а также возмущения, которые по своему спектральному составу относятся к медленноменяющимся (например, медленные уходы параметров, нулей и т. п.). Все прочие возмущающие факторы, среди которых могут быть и быстроменяющиеся функции времени, обозначим через $U(t)=\{U_1(t), \ldots, U_r(t)\}$ и будем полагать V и $U(t)$ независимыми. Тогда вероятностные моменты (начальные или центральные) k-го порядка для любой из выходных координат системы могут быть представлены в общем виде как математическое ожидание некоторой аналитической функции $\varphi^k(\cdot)$ случайных параметров $\bar{V}, U(t)$ и времени t, т. е.

$$\mu_k(t)=\int_{-\infty}^{\infty} dP(\bar{v}) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(\bar{u}, \bar{v}, t)\, dG(\bar{u}),$$

где $\varphi(\bar{u}, \bar{v}, t)$ — решение дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы; $P(\bar{v})$, $G(\bar{u})$ — законы распределений случайных параметров $\bar{V}$ и $\bar{U}(t)$.

Введем обозначение условных моментов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(\bar{u}, \bar{v}, t)\, dG(\bar{u}) = m_k(\bar{u}/\bar{v}; t),$$

где $m_k(\bar{u}/\bar{v}; t)$ также является аналитической функцией. В этом случае, как показано в [2], можно подобрать N таких комбинаций значений параметров $\bar{v}$ и коэффициентов $\alpha_s (s=\overline{1, N})$:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \xi_{11} & \ldots & \xi_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_s & \xi_{s1} & \ldots & \xi_{sm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_N & \xi_{N1} & \ldots & \xi_{Nm}, \end{matrix}$$

что математическое ожидание интересующей нас функции будет выражаться формулой

$$\mu_k(t)=\sum_{s=1}^{N} \alpha_s m_k(\bar{u}/\xi_s; t). \tag{1}$$

Вычисление значений $m_k(\bar{u}/\bar{\xi}_s; t)$, представляющих усредненные по $\bar{U}(t)$ значения функции $\varphi^k(\cdot)$ в узловых точках ξ_s, производится методом статистических испытаний.

С этой целью для каждого из N фиксированных значений дополнительно производится n независимых статистических испытаний и определяются условные оценки по формуле

$$\widehat{m}_k(\bar{u}/\xi_s; t)=\frac{1}{n} \sum_{j_s=1}^{n} \varphi^k(\xi_s, \bar{u}_{j_s}; t). \tag{2}$$

С учетом (1) и (2) выражение для безусловной оценки принимает вид

$$\hat{\mu}_k(t)=\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{N} \alpha_s \sum_{j_s=1}^{n} \varphi^k(\xi_s, \bar{u}_{j_s}; t). \tag{3}$$

Численные значения ξ_s и α_s определяются в предположении, что функция $m_k(\bar{u}/\bar{v}; t)$ может быть представлена рядом по степеням $v_1, \ldots, v_m$ порядка не выше q. Возможность такого представления обусловливается тем, что величины $v_1, \ldots, v_m$ являются малыми параметрами для динамических систем авторегулирования и последние устойчивы в диапазоне их изменений.

Количество комбинаций N при этом оказывается зависящим в конечном итоге от m и q. Способы задания ξ_s и α_s для некоторых частных значений q рассмотрены в [2, 3].

Ограничимся в дальнейшем величиной $q \leqslant 3$, т. е. будем учитывать при определении вероятностных моментов μ_k собственные моменты случайных параметров $V_1, \ldots, V_m$ не выше третьего. Это условие в большинстве случаев удовлетворяет как требованиям по точности определения конечного результата, так и требованиям по допустимому объему экспериментов. Все возмущения, для которых это условие не выполняется в системе, следует отнести к группе параметров $\bar{U}(t)$, учитываемых при статистических испытаниях.

При сделанных предположениях для выбранных $V_1, \ldots, V_m$ можно получить следующие алгоритмы задания эквивалентных значений ξ_s и коэффициентов α_s:

при $q \leqslant 2$

$$\xi_{si} = \sigma_i \rho_{st} \quad (i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, m+1}, \quad t = \overline{2, m+1}); \tag{4}$$

при $2 < q \leqslant 3$

$$\xi_{si} = \sigma_i \rho_{st} \quad (i = \overline{1, m},\ s = \overline{1, m+1},\ t = \overline{2, m+1});$$

$$\xi_{si} = -\sigma_i \rho_{s^*t} \left(i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, m+1}, \quad t = \overline{2, m+1}, \quad s^* = s - m - 1\right);$$

$$\alpha_s = \frac{1}{N}.$$

Здесь σ_i — известное среднеквадратическое отклонение случайной величины V_i; ρ_{st} — равные ± 1 элементы ортогональной по столбцам H-матрицы Адамара размером $(m+1)\times(m+1)$.

Суммарный объем экспериментов определяется как

$$N_\Sigma = Nn, \tag{5}$$

где

$$N = \begin{cases} m + 1 & \text{при} \quad q \leqslant 2; \\ 2(m + 1) & \text{при} \quad q = 3. \end{cases}$$

Методы построения матриц Адамара размером $(m+1)\times(m+1)$ для различных значений m изложены в [4]. Однако наиболее простые методы те, в которых $(m+1) = 2^p$, где p — целое число. Действительно, если H — матрица Адамара порядка $(m+1)$, то матрица

$$\begin{vmatrix} H & H \\ H & -H \end{vmatrix}$$

является матрицей Адамара порядка $2\times(m+1)$. Отсюда ясно, что на базе элементарной матрицы порядка 2×2

$$H_2 = \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{vmatrix}$$

можно построить матрицы порядка 4, 8 ... 2^p, что является для практических применений достаточно большим набором размеров.

Заметим, что если наиболее подходящая по размерности ортогональная матрица оказывается несколько шире, чем возможное количество эквивалентных воздействий в исследуемой системе, избыточные столбцы матрицы могут быть заменены фиктивными нулевыми воздействиями.

В результате статистического усреднения $\varphi^k(\cdot)$ по $\overline{U}(t)$ оценка $\hat{\mu}_k(t)$ оказывается случайной величиной с дисперсией

$$\sigma^2\left[\hat{\mu}_k(t)\right] = \frac{\alpha_s^2}{n}\sum_{s=1}^{N}\sigma_k^2\left(\overline{u}/\xi_s; t\right), \tag{6}$$

где $\sigma_k^2(\overline{u}/\xi_s; t)$ — дисперсия рассеивания $\varphi^k(\overline{u}/\xi_s;\ t)$ в s-м цикле статистических испытаний при случайных значениях возмущений $\overline{u}(t)$.

Оценка ее может быть найдена по известной формуле

$$\hat{\sigma}_k^2\left(\overline{u}/\xi_s; t\right) = \frac{1}{n}\sum_{j_s=1}^{n}\varphi^{2k}\left(\xi_s, \overline{u}_{j_s}; t\right) - \hat{m}_k^2\left(\overline{u}/\xi_s; t\right).$$

При одинаково заданной точности (дисперсии $\sigma^2[\hat{\mu}_k(t)]$) оценки выигрыш в объеме экспериментов по сравнению со статистическими испытаниями оказывается равным

$$\beta(t) = \frac{N\sigma_k^2(\overline{u}, \overline{v}; t)}{\sum\limits_{s=1}^{N}\sigma_k^2(\overline{u}/\xi_s; t)}, \tag{7}$$

где $\sigma_k^2(\overline{u}, \overline{v}; t)$ — дисперсия рассеивания $\varphi^k(\cdot)$ при случайных значениях возмущений $\overline{u}(t)$ и $\overline{v}$. Величина отношения (7) лежит в пределах $1 \leqslant \beta(t) \leqslant \infty$. Предельные случаи соответствуют чисто статистическим испытаниям ($\beta = 1$) или полной замене всех действующих возмущений их эквивалентными значениями ($\beta = \infty$), когда $\sigma_k^2\left(\overline{u}/\xi_s; t\right) = 0$. При комбинации эквивалентных воздействий со статистическими испытаниями получаемый выигрыш тем больше, чем больше «вес» эквивалентных возмущений или чем меньше величина рассеивания $\varphi^k(\overline{u}/\xi_s;\ t)$ за счет факторов, проявляющихся случайным образом.

Таким образом, предлагаемый способ проведения испытаний дает результат во всех случаях не хуже, чем статистические испытания. Наиболее целесообразно его применение при испытаниях и оценке характеристик систем с превалирующим значением возмущений, которые могут быть заменены в режиме испытаний на эквивалентные воздействия, а также при многократных испытаниях систем в различных условиях.

Пример. Рассмотрим динамическую систему регулирования со случайным входным воздействием $z(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} V_i z_i(t)$ и случайным вектором внешних и внутренних возмущений $\overline{U}(t)$. Здесь V_i — центрированные случайные величины с известными среднеквадратическими отклонениями σ_i; $z_i(t)$ — неслучайные координатные функции.

Пусть требуется найти дисперсию нормально распределенного случайного выходного процесса в системе, являющегося нелинейной функцией случайных аргументов $X = \varphi(V_1, \ldots, V_m; U_1(t), \ldots, U_r(t); t)$.

Предположим для простоты, что $q = 2$ и $m = 3$. Для этого случая из (5) определяем необходимое число циклов $N=4$ по n статистических испытаний в каждом цикле. Далее, используя H-матрицу размером 4×4 и (4), находим расчетные значения α_s и эквивалентных воздействий ξ_s для каждого цикла статистических испытаний ($s=1, 2, 3, 4$) системы, а именно:

$$\begin{array}{cccc} 1/4 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1/4 & -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_3 \\ 1/4 & \sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 \\ 1/4 & -\sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_3 . \end{array}$$

Оценка искомой дисперсии

$$\hat{\sigma}_1^2(t) = \hat{\mu}_2(t) - \hat{\mu}_1^2(t), \tag{8}$$

где

$$\hat{\mu}_2(t) = \frac{1}{4n}\sum_{s=1}^{N}\sum_{j_s=1}^{n}\varphi^2(\xi_s, \bar{u}_{j_s}; t),$$

$$\hat{\mu}_1(t) = \frac{1}{4n}\sum_{s=1}^{N}\sum_{j_s=1}^{n}\varphi(\xi_s, \bar{u}_{j_s}; t).$$

Пусть для любого s $\sigma_1(\bar{u}/\bar{v}=\xi_s;\ t)=\eta\sigma_1(\bar{u},\ \bar{v};\ t)$. Тогда, используя (6) и принимая во внимание, что

$$\sigma^2\left[\hat{\mu}_1^2(t)\right] = 2\sigma^4\left[\hat{\mu}_1(t)\right] \quad \text{и} \quad \sigma_2^2(\bar{u}/\bar{v} = \xi_s;\ t) = 2\sigma_1^4(\bar{u}/\bar{v} = \xi_s;\ t),$$

можно получить для относительной погрешности оценки (8) выражение

$$\frac{\sigma^2\left[\hat{\sigma}_1^2(t)\right]}{\sigma_1^4(\bar{u}, \bar{v}; t)} \simeq \frac{2\eta^4}{4n}.$$

При $\eta=0{,}5$ и $n=4$ получаем $N_\Sigma=16$, а относительная погрешность оценки равна 2/256. Для обеспечения такой же точности при чисто статистических испытаниях, т. е. при случайном задании расчетных значений V_i, потребовалось бы не менее 257 экспериментов [1] или в 16 раз больше. Этот же результат для принятых условий можно непосредственно получить из (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Бусленко, Ю. А. Шрейдер. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1961.
2. И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов. Статистическая динамика нелинейных систем. М., Физматгиз, 1962.
3. А. Я. Андриенко. Метод задания возмущений при исследовании статистической точности нелинейных систем управления. Техническая кибернетика. М., «Наука», 1965.
4. В. И. Левенштейн. Применение матриц Адамара к одной задаче кодирования. Проблемы кибернетики, вып. 5. М., Машгиз, 1961.

Поступила в редакцию 11 августа 1972 г.,
окончательный вариант — 20 июня 1973 г.