

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. М. Алиев, Л. Р. Сейдель. Об анализе сходимости итерационного алгоритма автоматической коррекции погрешностей.— Автометрия, 1971, № 4.
2. В. П. Попов. О точности цифровых измерительных приборов с автоматической коррекцией погрешности.— Автометрия, 1972, № 2.
3. Л. И. Волгин. Об одном классе измерительных цепей с аддитивной коррекцией погрешности.— Тезисы докладов РНТК «Структурные методы повышения точности измерительных устройств и систем». Киев, НТО Приборпром, 1972.
4. Ю. М. Туз. Исследование и разработка структурных методов повышения точности аналоговых и аналого-цифровых преобразователей напряжений.— Автореферат докторской диссертации, Киев, КПИ, 1972.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
6. Л. И. Волгин. Методы построения высокостабильных усилительных устройств.— ЭИКА, вып. 12. М., «Энергия», 1969. Тезисы докладов НТК «Проблемы разработки электронных приборов для измерения электрических напряжений и омических сопротивлений». Таллин, Эстонское правление НТОРиЭ им. А. С. Попова, 1967.
7. I. I. Colembeski et al. A class of minimum sensitivity amplifiers.— IEEE Trans., 1967, v. CT-14, N 1.

Поступила в редакцию 25 сентября 1972 г.
окончательный вариант — 6 ноября 1973 г.

УДК 518.6

М. А. СТАРКОВ

(Новосибирск)

СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ С ДВОЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬЮ

В работе* описан метод аналитического продолжения Фурье-спектра финитной функции, известного на отрезке $|\omega| \leq \Lambda$, на всю частотную ось. Для этого использовались функции с двойной ортогональностью, которые образуют полную ортогональную систему на отрезке $|\omega| \leq \Lambda$ и неполную ортогональную систему функций на всей оси.

В настоящей статье дано построение подобной системы в классе функций, заданных на сетке с использованием дискретного преобразования Фурье. Кроме того, показаны наиболее интересные в прикладном отношении свойства сеточных функций с двойной ортогональностью.

Введем следующие обозначения.

Функцию f , заданную на N равностоящих узлах сетки, будем называть также вектором f в N -мерном пространстве R^N с компонентами f_j .

Положим $N=2M$ и будем считать, что индекс при компонентах вектора пробегает все целые значения от $-M+1$ до M .

Будем говорить, что $f \in R^p$, если $f_j=0$ при $|j| > p$ (рис. 1, а), и $f \in R^s$, если $f_j=0$ при $|j| \leq p$ (рис. 1, б), причем

$$2p+2s+2=N.$$

* D. Slepian, H. O. Pollak. Prolate Spheroidal Wave Function, Fourier Analysis and Uncertainty.— Bell. Syst. Techn. J., 1961, v. 40, N 1.

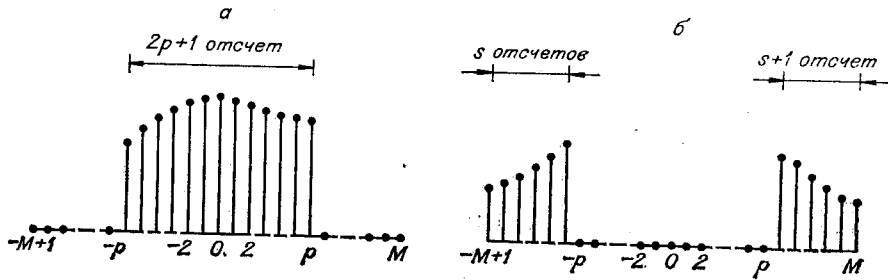


Рис. 1.

Известно, что прямое дискретное преобразование Фурье (ДФП) определяется выражением

$$h_k = L_{kj} f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-M+1}^M f_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} k j\right), \quad (1)$$

преобразование, обратное ему (ОДФП) —

$$f_j = \bar{L}_{jk} h_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-M+1}^M h_k \exp\left(\frac{2\pi i}{N} k j\right). \quad (2)$$

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$L_{kj}^p \psi_j = \lambda \psi_k, \quad (3)$$

где

$$L_{kj}^p \psi_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-p}^p \psi_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} k j\right),$$

а индекс k пробегает все целые значения от $-p$ до p . В силу симметрии матрицы L_{kj}^p ее собственные векторы ортогональны в смысле скалярного произведения

$$(\psi^j, \psi^k) = \sum_{i=-p}^p \psi_i^j \psi_i^k$$

и образуют полный ортогональный базис в R^p .

Теперь обратим внимание на то, что левую часть (3) можно рассматривать как ДФП от вектора $\psi \in R^p$, но тогда вектор в правой части не принадлежит R^p , так как его компоненты $|k| > p$ могут оказаться не равными нулю. Чтобы подчеркнуть этот факт, ДФП от ψ представим в виде суммы двух векторов ψ и φ , принадлежащих R^p и R^s соответственно:

$$L_{kj} \psi_j = \lambda \psi_k + \varphi_k, \quad (4)$$

и будем полагать, что векторы ψ нормированы.

На основании свойства ДФП (скалярное произведение двух векторов равно скалярному произведению их ДФП-изображений) можем записать для любых базисных векторов ψ^k и ψ^l :

$$(\psi^k, \psi^l) = (\lambda_k \psi^k + \varphi^k, \lambda_l \psi^l + \varphi^l) = \delta_{kl}, \quad (5)$$

где δ_{kl} — символ Кронекера. И, таким образом, сеточные функции $\lambda\psi + \varphi$ ортогональны в R^N . Заметим, что

$$(\lambda_k\psi^k + \varphi^k, \lambda_l\psi^l + \varphi^l) = \lambda_k\lambda_l(\psi^k, \psi^l) + (\varphi^k, \varphi^l),$$

откуда нетрудно видеть, что векторы φ ортогональны в R^s . Как видим, сеточная функция $\psi + \frac{1}{\lambda}\varphi$, нормированная в R^p , обладает свойствами двойной ортогональности.

Рассмотрим свойства собственных векторов ψ однородной системы уравнений (3) и их собственных чисел.

1. Сеточная функция ψ , некратного λ , либо четна, либо нечетна, т. е. или $\psi_j = \psi_{-j}$, или $\psi_j = -\psi_{-j}$.

Чтобы убедиться в этом, представим матрицу L_{kj}^p в виде

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left[\exp\left(-\frac{2\pi i}{N} kj\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\cos \frac{2\pi}{N} kj \right] - \frac{i}{\sqrt{N}} \left[\sin \frac{2\pi}{N} kj \right]. \quad (6)$$

Предположим, что ψ представима в виде суммы четной ψ^s и нечетной ψ^a сеточных функций:

$$\psi = \psi^s + \psi^a. \quad (7)$$

Заметим, что умножение четной сеточной функции на матрицу $\left[\cos \frac{2\pi}{N} kj \right]$ снова дает четную функцию, а умножение на $\left[\sin \frac{2\pi}{N} kj \right]$ дает ноль. Для нечетной сеточной функции справедливо обратное. Учитывая сказанное, (3) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-p}^p \psi_j^s \cos \frac{2\pi}{N} kj - \frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{j=-p}^p \psi_j^a \sin \frac{2\pi}{N} kj = \lambda (\psi_k^s + \psi_k^a). \quad (8)$$

В силу единственности разложения (7) можем приравнять четную и нечетную части полученного равенства друг другу:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-p}^p \psi_j^s \cos \frac{2\pi}{N} kj = \lambda \psi_k^s; \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-p}^p \psi_j^a \sin \frac{2\pi}{N} kj = \lambda \psi_k^a. \quad (9)$$

На основании (8) и (9) можно показать, что $\psi = \psi^s - \psi^a$ тоже является собственным вектором.

Действительно,

$$L_{kj}^p (\psi_j^s - \psi_j^a) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-p}^p \psi_j^s \cos \frac{2\pi}{N} kj + \frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{j=-p}^p \psi_j^a \sin \frac{2\pi}{N} kj = \lambda (\psi_k^s - \psi_k^a).$$

И, таким образом, некратному собственному числу соответствует два линейно-независимых собственных вектора. Следовательно, предположение (7) неверно. Таким образом, собственная функция ψ , соответствующая некратному собственному числу, либо четна, либо нечетна.

2. Собственные векторы, соответствующие простым собственным числам, пропорциональны вектору с действительными компонентами.

Предположим, что четный собственный вектор ψ может быть представлен в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$\psi = \psi' + i\psi'',$$

так, что ψ' и ψ'' линейно независимы.

Умножим вектор ψ на (6) и, учитывая его четность, получим

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-p}^p (\psi'_j + i\psi''_j) \cos \frac{2\pi}{N} kj = \lambda (\psi'_k + i\psi''_k).$$

Приравнивая друг другу действительные и мнимые части этого равенства, видим, что ψ' и ψ'' есть собственные векторы. А так как некратному собственному числу соответствует только один собственный вектор, то ψ' и ψ'' линейно зависимы, что и доказывает наше утверждение. Аналогичное рассуждение можно провести и для нечетных собственных векторов.

Можно показать, что эти свойства распространяются и на сеточные функции с двойной ортогональностью, т. е. на $\psi + \frac{1}{\lambda} \varphi$.

Полагаем, что векторы ψ имеют действительные компоненты, и тогда из равенства (5) получим

$$|\lambda| \leq 1. \quad (10)$$

4. Собственные числа, соответствующие четным собственным функциям, есть числа действительные, а нечетным — мнимые.

Это утверждение непосредственно следует из свойства 2.

Обозначим через \bar{L}_{kj}^p матрицу, комплексно-сопряженную матрице L_{kj}^p .

5. L_{kj}^p и \bar{L}_{kj}^p имеют одни и те же собственные векторы, соответствующие им собственные числа комплексно сопряжены.

Полученные выше свойства справедливы и для собственных векторов, соответствующих кратным собственным числам.

Введем функцию

$$J_k^p = \begin{cases} 1 & \text{при } |k| \leq p; \\ 0 & \text{при } |k| > p \end{cases} \quad (11)$$

и возьмем от нее ОДПФ

$$B_j^p = \bar{L}_{jk} J_k^p = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sin \frac{\pi}{N} (2p+1)j}{\sin \frac{\pi}{N} j}. \quad (12)$$

При выводе (12) было использовано известное тригонометрическое тождество

$$\frac{1}{2} e^{-ni\theta} + e^{-(n-1)i\theta} + \dots + e^{(n-1)i\theta} + \frac{1}{2} \exp ni\theta = \sin n\theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Свертку двух векторов обозначим через

$$a * b = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-M+1}^M a_{k-j} b_j = \bar{L}_{kl} [(L_{lj} a_j) (L_{lj} b_j)]. \quad (13)$$

Выражение (13) справедливо в предположении периодичности сеточных функций, т. е. $f_{j+N} = f_j$.

Из (11, 12) вытекает, что результат свертывания сеточной функции f с B^p равносильно отбрасыванию компонент вектора-изображения с $|j| > p$.

6. Собственный вектор матрицы L_{kj}^p , соответствующий собственному числу λ , является собственным для матрицы B_{k-j}^p с собственным числом $|\lambda|^2$.

Действительно, на основании (13)

$$B^p * \psi = \bar{L}_{kl} \{ J_l^p [L_{lj} \psi_j] \} = \bar{L}_{kl} \{ J_l^p [\lambda \psi_l + \varphi_l] \} = \lambda \bar{L}_{kl} \psi_l = |\lambda|^2 \psi_l + \lambda \varphi_l. \quad (14)$$

Из полученного свойства вытекает, что собственные векторы могут быть вычислены из однородной системы

$$\frac{1}{N} \sum_{j=-p}^p \frac{\sin \frac{\pi}{N} (2p+1)(k-j)}{\sin \frac{\pi}{N} (k-j)} \psi_j = |\lambda|^2 \psi_k. \quad (15)$$

Покажем еще одно полезное свойство, касающееся сеточной функции φ .

7. ДПФ сеточной функции φ есть функция с двойной ортогональностью в пространствах R^s и R^N с собственным числом $-\lambda$.

Для φ , равного

$$\varphi_k = L_{kj} \psi_j - \lambda \psi_k,$$

вычислим ОДПФ

$$\bar{L}_{lk} \varphi_k = \bar{L}_{lk} L_{kj} \psi_j - \lambda \bar{L}_{lk} \psi_k = -\lambda \varphi_l + (1 - |\lambda|^2) \psi_l.$$

Полученное равенство доказывает наше утверждение.

Из свойства 7 следует, что если вектор φ циклически сдвинуть на половину периода и умножить его компоненты на $(-1)^j$ (при этом изображение тоже сдвинется и умножится на $(-1)^k$), то его ДПФ станет вектором с двойной ортогональностью в пространстве R^p , $P_1 = S$ (рис. 2: a — исходная функция; b — функция, сдвинутая на половину периода; c — результат умножения на $(-1)^k$).

Таким образом, $2s+1$ собственных векторов матрицы порядка $2p+1$ при $p > s$ можно вычислить из матрицы меньшего порядка $2s+1$.

8. Если $p > s$, то однородная система уравнения (3) имеет не менее $2p-2s$ собственных чисел с $|\lambda| = 1$.

Для доказательства воспользуемся теоремой Виета — след матрицы равен сумме собственных значений — для однородной системы уравнений (15).

Будем полагать, что из $2p+1$ собственных чисел $2s+1$ нам известны из матрицы порядка $2s+1$ и сумма их квадратов модулей равна

$$N \sum_{j=0}^{2s} |\lambda_j|^2 = (2s+1)^2. \quad (16)$$

Собственные числа матрицы порядка $2p+1$ пронумеруем таким образом, чтобы первыми оказались известные нам, тогда

$$N \sum_{j=0}^{2p} |\lambda_j|^2 = N \sum_{j=0}^{2s} |\lambda_j|^2 + N \sum_{j=2s+1}^{2p} |\lambda_j|^2 = (2p+1)^2. \quad (17)$$

Теперь, если воспользоваться соотношением $2p+2s+2=N$, то из (16) и (17) нетрудно получить

$$\sum_{j=2s+1}^{2p} |\lambda_j|^2 = 2p - 2s, \quad (18)$$

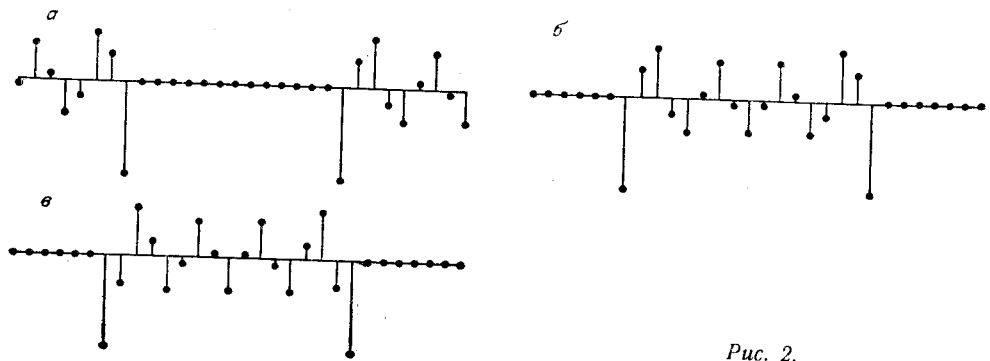


Рис. 2.

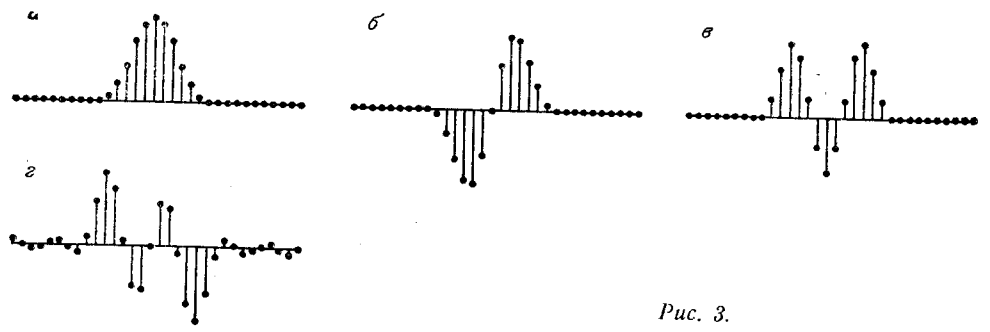


Рис. 3.

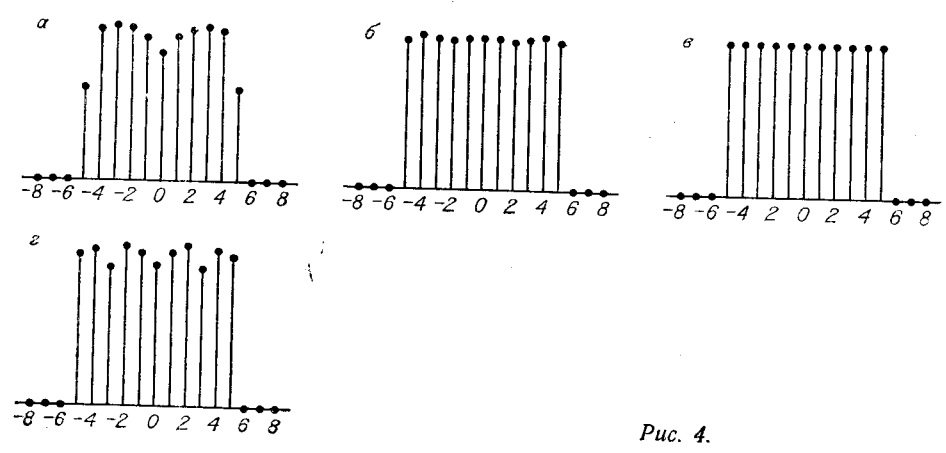


Рис. 4.

откуда на основании 3-го свойства

$$|\lambda_j| = 1, 2s < j \leq 2p,$$

что и требовалось доказать.

Как видим, неизвестные нам собственные векторы принадлежат пространству R^p как сами, так и их изображения. И если ставится задача восстановления компонент спектра, то эти собственные векторы интересовать нас не должны, так как неизвестные нам компоненты тождественно равны нулю.

Полученные свойства оказываются полезными при составлении алгоритмов для вычисления собственных векторов.

В таблице даны собственные значения однородной системы уравнений (3) для $M=32$ и $p=1 \div 7$, из которой видно, что ни один из корней не является кратным, а следовательно, все собственные векторы образуют полный ортогональный базис в R^p .

На рис. 3 показаны первые четыре сеточные функции с двойной ортогональностью, собственные значения которых убывают от a к s .

Пример. По заданным $2p+1$ компонентам изображения вектора $f \in R^p$ восстановить остальные компоненты или, что все равно, сам вектор.

1-й случай. Если $p < s$, то мы имеем полную ортонормированную систему собственных векторов пространства R^p . Неизвестные компоненты вектора $g \in R^s$ по известным $h \in R^p$ могут быть однозначно выражены в виде

$$g = \sum_{k=0}^{2p} A_k \varphi^k, \quad (19)$$

где

$$A_k = \frac{1}{\lambda} (h, \psi^k). \quad (20)$$

2-й случай: $p > s$. В этом случае воспользуемся неполной ортонормированной системой собственных векторов с собственными числами $|\lambda| < 1$. Решение получим в виде

$$g = \sum_{k=0}^{2s} A_k \varphi^k, \quad (21)$$

где A_k вычисляются по формуле (20).

На рис. 4 показано восстановление вектора $f_i = \begin{cases} 1 & \text{при } |j| \leq 5; \\ 0 & \text{при } |j| > 5. \end{cases}$ заданного компонентами изображения: a — двумя, b — тремя, c — четырьмя, d — пятью собственными функциями.

Как видим, первые четыре четных собственных вектора восстанавливают неизвестный с точностью не хуже 0,02%. Включение в решение 5-го вектора приводит к ухудшению результата. Это явление связано с тем, что 5-й вектор, отвечающий наименьшему собственному числу и имеющий наибольшую осцилляцию, подчеркнул шумы ЭЦВМ.

Поступила в редакцию 26 апреля 1973 г.