Приложение. Укажем преобразование матрицы C коэффициентов квадратичной формы $\sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j$ булевых переменных, не меняющее ни при каком допустимом наборе $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ значения квадратичной формы и обращающее в 0 все диагональные элементы матрицы.

Определим

$$c'_{i_0j} = \begin{cases} c_{i_0j} + \dfrac{c_{i_0i_0}}{m-1}, & j \neq i_0, \\ 0, & j = i_0, \end{cases} \qquad i_0 = 1, \ldots, n.$$

Непосредственно проверяется, что на любом допустимом наборе $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j.$$

ВЫВОДЫ

Рассмотрены приближенные методы определения оптимальной стратегии измерений в задаче оценивания параметров полинома первой степени при условии, что на результаты измерений аддитивно накладывается нестационарная нормальная помеха. Приведенные расчеты позволяют сделать вывод о вполне достаточной для практических целей точности предложенных методов.

Поступила в редакцию 5 апреля 1973 г.

УДК 621.317+519.21

К. С. ГИНСБЕРГ

(Москва)

ОБ ОЦЕНИВАНИИ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА ПО ТРЕМ ГРУППАМ НАБЛЮДЕНИЙ

В практических применениях теории обработки наблюдений часто возникает ситуация, когда необходимо оценить неизвестный параметр μ по данным нескольких статистических независимых групп наблюдений $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iN}$ $(i=\overline{1, p})$ В этом случае в зависимости от вида связи $x_{ij}(i=\overline{1, p}, j=\overline{1, N})$ и неизвестного параметра μ используются различные методы обработки наблюдений. В частности, если x_{ij} в каждой группе некоррелированы и $M[x_{ij}] = \mu$, $D[x_{ij}] = \sigma_i^2\left(j = \overline{1, N}\right)$, то оценка

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{p}\dfrac{1}{\sigma_i^2}}\sum_{i=1}^{p}\tilde{\mu}_i\frac{1}{\sigma_i^2}, \qquad \tilde{\mu}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_{ij} \tag{1}$$

является оптимальной в классе линейных и несмещенных оценок параметра μ.

Но чаще всего в практических задачах дисперсии σ_i^2 неизвестны. В этом случае в качестве оценки μ обычно принимают

$$\widetilde{\mu}^* = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{p} \frac{1}{s_i^2}} \sum_{i=1}^{p} \widetilde{\mu}_i \frac{1}{s_i^2}, \tag{2}$$

где

$$s_i^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(x_{ij} - \widetilde{\mu}_i\right)^2.$$

Исследование среднеквадратичной погрешности оценки (2) при $p=2$ и при указанных выше предположениях о статистических свойствах наблюдений было проведено в работах [1—3]. При этом дополнительно предполагалось, что все наблюдения распределены по нормальному закону.

В данной работе исследуются свойства оценки (2) при $p=3$. Предполагается, что наблюдения в каждой группе некоррелированы и распределены по нормальному закону $N\left(\mu, \sigma_i^2\right)$.

Нетрудно показать, что при $p=3$

$$M\left(\mu - \widetilde{\mu}^*\right)^2 = \frac{1}{N} M \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} \sigma_i^{-2} z_i^{-2}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{3} \sigma_i^{-2} z_i^{-1}\right)^2}, \tag{3}$$

где z_1, z_2, z_3 — статистически независимые случайные величины, распределенные по закону $\varkappa^2$ с $N-1$ степенями свободы.

Заметим, что $M(\mu-\mu^*)^2$ является симметрической функцией σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2. Поэтому достаточно рассмотреть среднеквадратичную ошибку $\widetilde{\mu}^*$ только в области $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \sigma_3^2$. Введем новые переменные $F_i = \frac{\sigma_3^2}{\sigma_i^2} \left(i = \overline{1, 3}\right)$. Тогда

$$0 \leqslant F_1, \leqslant F_2 \leqslant F_3, \; F_3 = 1, \; 0 \leqslant F_i \leqslant 1.$$

Теперь $M(\mu-\widetilde{\mu}^*)^2$ можно представить в виде

$$M\left(\mu - \widetilde{\mu}^*\right)^2 = \frac{1}{N} \sigma_3^2 P\left(F_1, F_2\right),$$

где

$$P\left(F_1, F_2\right) = M \frac{F_1 \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^2 + F_2 \left(\frac{z_3}{z_2}\right)^2 + 1}{\left(F_1 \frac{z_3}{z_1} + F_2 \frac{z_3}{z_2} + 1\right)^2}. \tag{4}$$

Функция $P(F_1, F_2)$ обладает следующими свойствами (см. приложение).

Если $N \geqslant 15$, то

$$\frac{\partial P\left(F_1, F_2\right)}{\partial F_2} < 0, \tag{5а}$$

$$\frac{\partial T(F)}{\partial F} < 0, \tag{5б}$$

где $T(F) = P(F, F)$.

Из неравенств (5) следует, что при $N \geqslant 15$ и

1) $F_2 \geqslant F_1$, $F_2 \neq 0$, $F_1 \neq 0$ имеет место

$$P(F_1, F_2) \leqslant P(F_1, F_1) < P(0, 0) = 1; \tag{6}$$

2) $F_2 > F_1$, $F_2 \neq 0$, $F_1 = 0$, $F_2 > F_2'$ имеет место

$$P(0, F_2) < P(0, F_2') < P(0, 0) = 1.$$

Следовательно (см. (4), (6)), когда $N \geqslant 15$, получаем $M(\mu - \tilde{\mu}^*)^2 \leqslant \leqslant \frac{1}{N}\sigma_3^2$, причем равенство выполняется только в случае $F_2 = 0$. Таким образом, при $N \geqslant 15$ оценка $\tilde{\mu}^*$ является оптимальной оценкой в классе $\tilde{\mu}^*$, $\tilde{\mu}_i$ $(i = \overline{1, 3})$.

Необходимо отметить, что $\tilde{\mu}^*$ может быть оптимальной оценкой и в случае $N \leqslant 15$. Однако, когда $N < 11$, она уже не является оптимальной. Это непосредственно следует из работы [1], где показано, что только при $N \geqslant 11$ выполняется условие оптимальности для оценки $\tilde{\mu}^*(p=2)$, которая является частным случаем оценки $\tilde{\mu}^*(p=3)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем неравенство (5а):

$$\frac{\partial P(F_1, F_2)}{\partial F_2} = M\left(F_1 \frac{z_3}{z_1} + F_2 \frac{z_3}{z_2} + 1\right)^{-3} \frac{z_3}{z_2} \Psi, \tag{7}$$

где

$$\Psi = \frac{z_3}{z_2} - \left(F_2 - \frac{F_1}{8}\right)\frac{z_3^2}{z_2^2} - 2 - F_1\left(\frac{z_3}{z_1}\sqrt{2} - \frac{z_3}{z_2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2.$$

Функция $\Psi \leqslant \frac{z_3}{z_2} - 2$. Вследствие этого

$$\frac{\partial P(F_1, F_2)}{\partial F_2} \leqslant M\frac{z_3}{z_2}\left(\frac{z_3}{z_2} - 2\right)\left(F_1 \frac{z_3}{z_1} + F_2 \frac{z_3}{z_2} + 1\right)^{-3}. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что

$$M\frac{z_3}{z_2}\left(\frac{z_3}{z_2} - 2\right)\left(F_1 \frac{z_3}{z_1} + F_2 \frac{z_3}{z_2} + 1\right)^{-3} \leqslant M\frac{z_3}{z_2}\left(\frac{z_3}{z_2} - 2\right)\left(1 + 2F_2 + \right.$$
$$\left. + 2F_1\frac{z_2}{z_1}\right)^{-3} = M\left[\frac{(N-1)(N+1)}{z_2^2} - \frac{2(N-1)}{z_2}\right]\left(1 + 2F_2 + 2F_1\frac{z_2}{z_1}\right)^{-3} =$$
$$= \Phi(F_1, F_2). \tag{9}$$

Введем новые переменные $x_2 = z_2$, $x_1 = \frac{z_2}{z_1}$. Тогда

$$\Phi(F_1, F_2) = C_0\left[(N+1)\int_0^\infty (1 + \beta x_1)^{-3} x_1^{\frac{N-7}{2}} (1 + x_1)^{-N+3} dx_1 - \right.$$
$$\left. - 4(N-3)\int_0^\infty (1 + \beta x_1)^{-3} x_1^{\frac{N-5}{2}} (1 + x_1)^{-N+2} dx_1\right], \tag{10}$$

где

$$C_0 = \frac{N-1}{4(1+2F_2)^3} \frac{\Gamma(N-3)}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}, \qquad \beta = \frac{2F_1}{1+2F_2} < 1,$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Известно (см., например, [4]), что $\Phi(F_1, F_2)$ можно представить в виде

$$\Phi(F_1, F_2) = C_0\Big[(N+1)\,\mathrm{B}\left(\frac{N-5}{2}, \frac{N+5}{2}\right){}_1F_2\left(3, \frac{N-5}{2}; N; 1-\beta\right) -$$
$$-4(N-3)\,\mathrm{B}\left(\frac{N-3}{2}; \frac{N+5}{2}\right){}_1F_2\left(3, \frac{N-3}{2}; N+1; 1-\beta\right)\Big] =$$
$$= 2C_0\mathrm{B}\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N+5}{2}\right)\left[\frac{(N+1)N}{N-5}\,{}_1F_2\left(3, \frac{N-5}{2}; N; 1-\beta\right) -\right.$$
$$\left. -2(N-3)\,{}_1F_2\left(3, \frac{N-3}{2}; N+1; 1-\beta\right)\right], \tag{11}$$

где $\mathrm{B}(x, y)$ — бета-функция, ${}_1F_2(\alpha; \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Нетрудно показать, пользуясь неравенством

$${}_1F_2\left(3, \frac{N-3}{2}; N+1; 1-\beta\right) > {}_1F_2\left(3, \frac{N-5}{2}; N; 1-\beta\right),$$

что при $N \geqslant 15$ $\Phi(F_1, F_2) < 0$. (12)

В этом случае из (8—9) и (12) следует, что при $N \geqslant 15$

$$M\frac{z_3}{z_2}\left(\frac{z_3}{z_2} - 2\right)\left(1 + F_1\frac{z_3}{z_1} + F_2\frac{z_3}{z_2}\right)^{-3} < 0, \quad \frac{\partial P(F_1, F_2)}{\partial F_2} < 0. \tag{13}$$

Докажем неравенство (5б).

Рассмотрим поведение $P(F_1, F_2)$ при $F_2 = F_1 = F$. Введем обозначение $T(F) = P(F, F)$. Тогда

$$T(F) = M\left(1 + F\frac{z_3^2}{z_1^2} + F\frac{z_3^2}{z_2^2}\right)\left(1 + F\frac{z_3}{z_1} + F\frac{z_3}{z_2}\right)^{-2}; \tag{14}$$

$$\frac{dT(F)}{dF} = M\left(\frac{z_3}{z_2}\alpha_2 + \frac{z_3}{z_1}\alpha_1 - \frac{z_3^2}{z_1 z_2^2}F - \frac{z_3^2}{z_2 z_1^2}F\right)\left(1 + F\frac{z_3}{z_1} + F\frac{z_3}{z_2}\right)^{-3} \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\frac{z_3}{z_2}\alpha_2 + \frac{z_3}{z_1}\alpha_1\right)\left(1 + F\frac{z_3}{z_1} + F\frac{z_3}{z_2}\right)^{-3} = 2M\alpha_2\frac{z_3}{z_2}\left(1 + F\frac{z_3}{z_1} +\right.$$
$$\left. + F\frac{z_3}{z_2}\right)^{-3} \leqslant 2M\frac{z_3}{z_2}\left(\frac{z_3}{z_2} - 2\right)\left(1 + F\frac{z_3}{z_1} + F\frac{z_3}{z_2}\right)^{-3}, \tag{15}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{z_3}{z_1} - F\frac{z_3^2}{z_1^2} - 2, \qquad \alpha_2 = \frac{z_3}{z_2} - F\frac{z_3^2}{z_3^2} - 2.$$

Следовательно (см. (13), (15)), при

$$N \geqslant 15\frac{dT(F)}{dF} < 0. \tag{16}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Graybill, R. B. Deal. Combining unbiased estimators.— Biometrics, 1959, v. 15, N 4.
2. J. S. Mehta, J. Gurland. Combinations of unbiasedestimators of the mean which consider inequality of unnown variances.—J. Amer. Stat. Assoc., 1969, v. 64, N 327.
3. Т. Ф. Кудряшова. Об оценивании измеряемой величины по двум группам наблюдений.— Автометрия, 1972, № 1.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 19 марта 1973 г.

УДК 621.317.7.088.7

Л. И. ВОЛГИН

(Таллин)

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Автоматическая коррекция погрешности методом итераций (последовательных приближений) является перспективным направлением повышения точности измерительных устройств [1—4]. Итерационная коррекция, как и другие структурные методы повышения точности, требует для своей реализации введения (или наличия) избыточности. Реализация итерационных методов коррекции осуществляется за счет введения аппаратурной избыточности (для устройств с пространственным разделением корректирующих каналов) или за счет увеличения времени измерения (для устройств с временным разделением каналов). В ряде случаев итерационные методы являются более эффективными по сравнению с другими способами повышения точности. К настоящему времени можно уже указать следующие области применения итерационной коррекции. Это, во-первых, устройства, изготовляемые по интегральной технологии, где расход количества оборудования, в частности активных элементов, не является ограничивающим фактором. Благоприятствующими факторами использования итерационных методов повышения точности аналоговых твердотельных (интегральных) схем являются отсутствие обратных связей и однородность (повторяемость) структурной схемы.

Другая область применения итерационных методов — это повышение точности усилительных устройств. Здесь по сравнению со способом повышения точности путем введения обратной связи может быть обеспечена более высокая точность при одинаковом расходе оборудования (усилительных каскадов) или обеспечена та же одинаковая точность при меньшем расходе оборудования. При этом отпадают вопросы, связанные с обеспечением устойчивости. Например, указанная возможность может быть реализована при каскадировании (при последовательном соединении) двухканальных усилительных устройств, построенных по нижеприведенным алгоритмам (3) или (11).

Еще одна обширная область применения итерационных алгоритмов повышения точности — это гибридные измерительные устройства с цифровым отсчетом, в которых погрешность грубого аналогового преобразователя корректируется в соответствии с заложенными алгоритмом средствами дискретной техники. Именно итерационные алгоритмы позволяют реализовать все достоинства гибридной схемотехники в из-