УДК 519.24

А. Д. МАЦ, Л. Г. РАСКИН

(Харьков)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫБОРА МОМЕНТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

В работе* обсуждалась структура оптимального распределения моментов измерений в случае, когда сигнал представляется в виде

$$S(t)=a_0+a_1t+\xi(t),$$

где $\xi(t)$ — нестационарная нормальная помеха, а дисперсия ошибок измерений изменяется по экспоненциальному закону $\sigma^2(t)=ce^{\alpha t}$. В качестве критерия оптимальности рассматривался определитель корреляционной матрицы оценок параметров a_0, a_1.

В случае когда закон изменения дисперсии ошибок измерений задается дифференцируемой функцией, в ** приведена система соотношений, из которой в принципе можно получить соответствующую оптимальную стратегию измерений. Однако даже численное решение этой системы затруднительно. Поэтому может считаться открытым вопрос об оптимальном распределении моментов измерений для сигнала $S(t)$ в случае произвольного изменения дисперсии ошибок измерений и при других критериях оптимальности.

В данной статье излагается методика приближенного решения этой задачи.

Постановка задачи. Пусть сигнал на интервале измерений $[T_н, T_к]$ представляется в виде $S(t)=a_0+a_1t+\xi(t)$, где $\xi(t)$ — нестационарная нормальная помеха с известной дисперсией, а a_0, a_1 — неизвестные параметры, которые оптимально оцениваются по результатам m измерений $s(t_1)$, $s(t_2)$, ..., $s(t_m)$. (Под оптимальной обработкой результатов измерений подразумевается обработка, приводящая к оценкам с минимальной дисперсией. В рассматриваемом случае это метод наименьших квадратов или любая эквивалентная ему схема.)

Для корреляционной матрицы H оценок параметров a_0, a_1 справедливо следующее соотношение:

$$H^{-1}=\begin{Vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{\sigma^2(t_i)} & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{t_i}{\sigma^2(t_i)} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{t_i}{\sigma^2(t_i)} & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{t_i^2}{\sigma^2(t_i)} \end{Vmatrix},$$

где H^{-1} — матрица, обратная к H, а $\sigma^2(t_i)$ — дисперсия ошибки измерения в момент $t=t_i$.

Предположим, что измерения на интервале $[T_н, T_к]$ могут проводиться только в точках вида

$$t_i=T_н+(i-1)\gamma,\quad i=1, 2, \ldots, n,$$

где γ — минимально возможный промежуток между соседними измерениями.

---

* А. А. Малицкий, А. Д. Мац, Л. Г. Раскин. О выборе моментов измерений в одной задаче оценивания параметров.— Автометрия, 1972, № 3.

** См. указ. соч.

Ставится задача отыскания распределения $m (m<n)$ моментов измерений, оптимального в смысле некоторого критерия.

Введем в рассмотрение набор булевых переменных:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в момент } t = t_i \text{ производится измерение;} \\ 0, & \text{если в момент } t = t_i \text{ измерение не производится.} \end{cases}$$

Тогда

$$H^{-1} = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma^2(t_i)} & \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i t_i}{\sigma^2(t_i)} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i t_i}{\sigma^2(t_i)} & \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i t_i^2}{\sigma^2(t_i)} \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые критерии оптимальности и укажем целевую функцию для каждого из них.

Определитель корреляционной матрицы оценок параметров ($\det H$). В рассматриваемом случае нормального распределения ошибок измерений $\det H$ характеризует объем эллипсоида рассеяния оценок параметров. Естественно потребовать отыскания такой стратегии измерений, которая минимизирует на множестве всех стратегий $\det H$ или, что то же, максимизирует $\det H^{-1}$. Целевая функция в этом случае имеет вид

$$\Psi_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{t_j^2 - t_i t_j}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} x_i x_j. \tag{1}$$

Заметим, что (1) является квадратичной формой булевых переменных x_i.

След корреляционной матрицы оценок параметров (SpH). Минимизация SpH эквивалентна минимизации суммы дисперсий оценок параметров a_0, a_1. Целевая функция

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{t_i^2 + 1}{\sigma_i^2} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{t_j^2 - t_i t_j}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} x_i x_j} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{t_i^2 + 1}{\sigma_i^2} x_i x_j}{m \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{t_j^2 - t_i t_j}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} x_i x_j}.$$

Так как развитые ниже вычислительные методы формулируются для случая максимизации функционала, будем в качестве критерия оптимальности рассматривать

$$\Psi_2(x_1, \ldots, x_n) = -\Phi(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Дисперсия оценки $s(t)$ в задаче экстраполяции. Пусть $\tau > T_к$. Найдем стратегию измерений, минимизирующую на множестве всех стратегий дисперсию оценки $s(\tau)$. Целевая функция имеет вид

$$\Psi_3(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{(\tau - t_i)^2}{\sigma_i^2} x_i x_j}{m \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{t_i t_j - t_j^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} x_i x_j}. \tag{3}$$

Для каждого из рассмотренных критериев оптимальности задача формулируется следующим образом: определить набор $\{x_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m; \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad x_i - \text{целое}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

и максимизирующий соответствующую целевую функцию $\Psi_k(x_1, \ldots, x_n)$.

Поставленная задача является нелинейной задачей целочисленного программирования с булевыми переменными. Как показано ниже, для максимизации функций (1), (2), (3) с ограничениями (4) достаточно уметь максимизировать квадратичную форму булевых переменных с ограничениями (4). В настоящее время не разработаны точные методы (кроме, естественно, перебора) решения этой задачи. Прямой перебор приводит к вычислению C_n^m значений целевой функции, что для достаточно больших n и m лишено практической ценности. Ниже излагаются эвристический алгоритм максимизации квадратичной формы переменных $x_i (i=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих ограничениям (4), и методика применения этого алгоритма для максимизации функций (2), (3).

Приближенная максимизация квадратичной формы булевых переменных. Пусть требуется определить

$$\max_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \tag{5}$$

где $x_i (i=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют ограничениям (4). Не снижая общности, матрицу C коэффициентов c_{ij} квадратичной формы (5) можно считать симметрической. Кроме того, матрицу C можно подвергнуть преобразованию, не меняющему ни при каком допустимом наборе $\{x_{ij}\}_{i=1}^n$ значения квадратичной формы и обращающему в 0 все диагональные элементы матрицы (см. приложение). Поэтому будем считать, что

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad c_{ii} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Предлагаемый алгоритм максимизации осуществляет последовательный выбор компонент вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, равных 1, для максимизации приращения целевой функции при очередном выборе.

0-я итерация. Пусть $c_{pr} = \max\limits_{\{i,j\}} c_{ij}$. Тогда полагаем $x_p = x_r = 1$ и включаем их в конструируемый набор.

$k+1$-я итерация. Пусть проведено k итераций и пусть $I_к$ — множество индексов i, для которых $x_i = 1$ после k итераций. На $k+1$-й итерации в конструируемый набор включаются один или два новых элемента, обеспечивающих максимально возможное приращение целевой функции. Для определения этих элементов поочередно рассматриваются все те c_{ij}, у которых хотя бы один из индексов не принадлежит $I_к$. При этом представляются две возможности.

1. Пусть $i, j \overline{\in} I_к$. Тогда вычисляем сумму

$$c_{ij} + \sum_{k \in I_к} (c_{ik} + c_{kj}).$$

2. Пусть, например, $i \overline{\in} I_к$, $j \in I_к$. Тогда вычисляем сумму

$$\sum_{k \in I_к} c_{ik}.$$

Указанные суммы вычисляются для всех допустимых c_{ij} и среди них выбирается максимальная. Если она порождена элементом c_{st}, где s, $t \in I_к$, то в конструируемый набор включаются x_s, x_t. Если элемент c_{st} реализует случай 2, то полагаем $x_s = 1$. Итерационная процедура заканчивается, когда выполняется условие $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = m$.

Замечание. Если перед очередным шагом процедуры $\sum\limits_{1=i}^{n} x_i = m - 1$, то следует рассматривать только те c_{ij}, у которых точно один индекс не принадлежит $I_к$. Это обеспечит введение в конструируемый набор недостающего элемента.

Эффективность изложенного алгоритма оценивалась при максимизации симметризованной Ψ_1. Сравнивалось точное значение, найденное перебором, с приближенным. Рассматривались следующие законы изменения дисперсии $\sigma^2(t)$: экспоненциальный, различные варианты парабол, W-образная форма. Проведено более 40 расчетов при $n=20$ и варьируемых m. Отклонение от оптимума ни в одном случае не превысило 1,5%. Время решения задач указанной размерности на ЭВМ типа М-20 не превышает 3 мин. (Перебор при решении задачи такой размерности длится около часа.) Решение задачи при $n=50$, $m=25$ продолжалось около 20 мин.

Максимизация целевых функций Ψ_2, Ψ_3. Обе целевые функции имеют структуру

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{F(x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)},$$

где F и G — квадратичные формы переменных $x_i (i=1, \ldots, n)$, удовлетворяющих условию (4).

Обозначим множество векторов $\vec{x}$ с компонентами $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию (4), через М. Для максимизации $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ при условии (4) используется следующая итерационная процедура. (A).

Пусть $\vec{x}_0 \in M$ и $\Psi(\vec{x}_0) \leqslant \max\limits_{\vec{x} \in M} \Psi(\vec{x})$. Определим $\max\limits_{\vec{x} \in M} \{F(\vec{x}) - \Psi(\vec{x}_0) G(\vec{x})\}$.

Допустим этот max достигается в точке $\vec{x}_1$. Затем определяем $\max\limits_{\vec{x} \in M} \{F(\vec{x}) - \Psi(\vec{x}_1) G(\vec{x})\}$ (он достигается в точке $\vec{x}_2$) и т. д.

Теорема. Пусть $\{\vec{x}_к\}$ — множество точек, определяемых итерационной процедурой (A). Тогда 1) существует $\vec{x}_к$ такое, что

$\max\limits_{\vec{x} \in M} \{F(\vec{x}) - \Psi(\vec{x}_к) G(\vec{x})\} = 0$, 2) если $\max\limits_{\vec{x} \in M} \{F(\vec{x}) - \Psi(\vec{x}_к) G(\vec{x})\} = 0$, то $\Psi(\vec{x}_к) = \max\limits_{\vec{x} \in M} \Psi(\vec{x})$.

Доказательство теоремы основано на монотонном неубывании членов последовательности $\{\Psi(\vec{x}_к)\}$ и конечности множества М.

В процессе решения задачи на каждом шаге процедуры (A) используется алгоритм максимизации квадратичной формы булевых переменных. Его квазиоптимальность приводит, вообще говоря, к квазиоптимальному набору $(x_1, \ldots, x_n)$ при максимизации целевых функций Ψ_2, Ψ_3.

Приложение. Укажем преобразование матрицы C коэффициентов квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j$ булевых переменных, не меняющее ни при каком допустимом наборе $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ значения квадратичной формы и обращающее в 0 все диагональные элементы матрицы.

Определим

$$c'_{i_0j}=\begin{cases} c_{i_0j}+\dfrac{c_{i_0i_0}}{m-1}, & j\neq i_0, \\ 0, & j=i_0, \end{cases} \quad i_0=1,\ldots,n.$$

Непосредственно проверяется, что на любом допустимом наборе $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j.$$

ВЫВОДЫ

Рассмотрены приближенные методы определения оптимальной стратегии измерений в задаче оценивания параметров полинома первой степени при условии, что на результаты измерений аддитивно накладывается нестационарная нормальная помеха. Приведенные расчеты позволяют сделать вывод о вполне достаточной для практических целей точности предложенных методов.

Поступила в редакцию 5 апреля 1973 г.

УДК 621.317+519.21

К. С. ГИНСБЕРГ
(Москва)

ОБ ОЦЕНИВАНИИ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА ПО ТРЕМ ГРУППАМ НАБЛЮДЕНИЙ

В практических применениях теории обработки наблюдений часто возникает ситуация, когда необходимо оценить неизвестный параметр μ по данным нескольких статистических независимых групп наблюдений x_{i1}, $x_{i2},\ldots,$ x_{iN} $(i=\overline{1,\ p})$. В этом случае в зависимости от вида связи $x_{ij}(i=\overline{1,\ p},\ j=\overline{1,\ N})$ и неизвестного параметра μ используются различные методы обработки наблюдений. В частности, если x_{ij} в каждой группе некоррелированы и $M[x_{ij}]=\mu$, $D[x_{ij}]=\sigma_i^2\left(j=\overline{1,N}\right)$, то оценка

$$\tilde{\mu}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\sigma_i^2}}\sum_{i=1}^{p}\tilde{\mu}_i\frac{1}{\sigma_i^2},\qquad \tilde{\mu}_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_{ij} \tag{1}$$

является оптимальной в классе линейных и несмещенных оценок параметра μ.