ЛИТЕРАТУРА

1. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1969.
2. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, «Наукова думка», 1965.
3. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 3.
4. В. А. Морозов. О регуляризирующих семействах операторов.—В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 8. М., МГУ, 1967.
5. Л. В. Канторович, В. В. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 6 июня 1973 г.

УДК 621.391.233 : 621.398.08

О. Ю. ГЕРТИГ

(Ленинград)

ИНФОРМАТИВНОСТЬ ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКИХ СООБЩЕНИЙ С ВОЗМУЩЕННЫМИ КООРДИНАТАМИ ВРЕМЕНИ

В современном представлении пространственно-временные меры сообщений являются зависимыми, т. е. изменения пространственных координат влекут за собой изменения временной координаты, и наоборот. Связь погрешности оценки временной координаты сигнала с величиной случайных (шумовых) искажений его пространственных характеристик исследована достаточно подробно. Значительно меньше внимания уделено обратному влиянию погрешности оценки временной координаты на величину пространственных (информационных) координат процессов. Существующими теориями не учитываются возмущения временной координаты процессов, приводящие к нарушению информационного тождества измеряемой функции и принятого сообщения. В то же время диалектика постоянного повышения точности информационно-измерительных систем, малое время общего цикла измерений, высокая скорость изменения контролируемых координат объектов и сложный путь доставки данных потребителю обусловливают необходимость установления зависимости между величиной случайных возмущений временных координат сигнала и точностью восстановления сообщений.

Определение этой зависимости удобно произвести с помощью аппарата дискретного преобразования непрерывных функций [1]. Характеристикой связи временных и пространственных координат сообщений может служить удельная информативность сигналов в канале с нарушениями этих координат, т. е. количество информации, переносимое элементом сигнала.

Пусть сообщение информационно-измерительной системы представляет собой некоторую реализацию случайной функции на интервале наблюдения $0 - T$.

Теория дискретного преобразования позволяет представить отрезок стационарной случайной функции $x(t)$, заданной на интервале $0 - T$ суммой конечного числа n элементов разложения, выбранных по некоторому правилу:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\, \varphi(t - t_i), \tag{1}$$

где $x(t_i)$ — некоррелированные между собой отсчеты случайной функции в моменты времени $t_i (i=1, \ldots, n)$; $\varphi(t-t_i)$ — неслучайные нормированные координатные функции данного разложения, удовлетворяющие условию ортогональности

$$\int\limits_T \varphi(t-t_i)\, \varphi(t-t_j)\, dt = \delta_{ij},$$

δ_{ij} — дельта-функция Кронекера.

Формирование, передача и прием сигналов отсчетов сопровождаются погрешностями преобразования каждого элемента по величине ξ_i и по временному положению τ_i.

Принятое сообщение имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} [x(t_i + \tau_i) + \xi_i]\, \varphi(t - t_i - \tau_i), \tag{2}$$

из которого следует, что точное восстановление первоначального сообщения (1) с использованием координатных функций, фаза которых задана аргументом принятых отсчетов и потому случайна, невозможно. Информационную оценку рассогласования (1) и (2) дадим на основе методики, развитой в [2].

Следуя А. Н. Колмогорову [3, 4], будем рассматривать случайные величины $x(t_i)$ с конечной дисперсией $\sigma_x^2 = M\{x^2(t_i)\}$ как векторы евклидова пространства Z со скалярным произведением в виде математического ожидания $M\{x(t_i)x(t_j)\}\varphi(t_i-t_j)$, где $\varphi(t_i-t_j)$ — весовая функция, определяющая правило проектирования векторов в пространстве Z, совпадающая с координатной функцией разложения (1). В таком случае вектору $\vec{X}$, связанному с сообщением (1), будет отвечать n-мерное линейное подпространство X пространства Z, натянутое на элементы $x(t_i)$. В силу ортонормированности базиса разложения (1) его отсчеты можно рассматривать как n-мерные векторы, ориентированные по соответствующим ортам данного разложения:

$$\vec{X}_1 = \begin{Vmatrix} x(t_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \ldots \qquad \vec{X}_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ x(t_n) \end{Vmatrix}.$$

Так как предполагается, что принятый сигнал (2) принадлежит пространству Z, то, в свою очередь, ему будет соответствовать другое n-мерное (многомерные распределения вероятностей предполагаются невырожденными) подпространство Y того же пространства Z, натянутое на элементы $x(t_i+\tau_i)+\xi_i$.

Согласно [2], количество информации о X в Y (или наоборот) зависит только от самих подпространств, а не от выбора базиса в них, поэтому последний может быть выбран произвольно. Более удобным для анализа представляется найти ортонормированный базис подпространства X. В этом случае вектор

$$\vec{X} = \begin{Vmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \cdots \\ x(t_n) \end{Vmatrix} \tag{3}$$

и вектор

$$\vec{Y} = \begin{Vmatrix} \varphi(\tau_1) & \varphi(t_1 - t_2 - \tau_2) & \cdot & \varphi(t_1 - t_n - \tau_n) \\ \varphi(t_2 - t_1 - \tau_1) & \varphi(\tau_2) & \cdot & \varphi(t_2 - t_n - \tau_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(t_n - t_1 - \tau_1) & \varphi(t_n - t_2 - \tau_2) & \cdot & \varphi(\tau_n) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x(t_1 + \tau_1) + \xi_1 \\ x(t_2 + \tau_2) + \xi_2 \\ \cdot \\ x(t_n + \tau_n) + \xi_n \end{Vmatrix} \qquad (4)$$

могут быть представлены проекциями на собственные векторы подпространства X.

При отыскании предельных информационных оценок естественно ввести допущение о том, что вероятностные характеристики исходной случайной стационарной функции $x(t)$ и случайных погрешностей ξ_i определяются многомерными нормальными законами распределения, центрированными своими средними значениями. В этом случае количество информации $I(X, Y)$, содержащееся в сигнале $y(t)$ об исходной функции $x(t)$, равно [2]

$$I(X, Y) = \frac{1}{2} \ln \frac{|K_{xx}|\,|K_{yy}|}{\begin{vmatrix} K_{xx} K_{xy} \\ K_{yx} K_{yy} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \ln \frac{|K_{yy}|}{|K_{yy} - K_{yx} K_{xx}^{-1} K_{xy}|}, \qquad (5)$$

где $K_{xx} = (k_{ij}^{xx})_1^n$, $K_{yy} = (k_{ij}^{yy})_1^n$, $K_{xy} = (k_{ij}^{xy})_1^n$, $K_{yx} = (k_{ij}^{yx})_1^n$ —

ковариационные матрицы, элементы которых находятся как скалярные произведения соответствующих элементов векторов (3) и (4); $|K_{yy}|$ — определитель матрицы K_{yy}; K_{xx}^{-1} — матрица, обратная K_{xx}.

Априорная ортонормированность базиса разложения и принятое определение скалярного произведения определяют диагональный вид матриц выражения (5). Значения элементов главной диагонали матрицы K_{xx} совпадают с дисперсией процесса $x(t)$: $k_{ii}^{xx} = M\{x^2(t_i)\} = \sigma_x^2$. Значения диагональных элементов матриц K_{yy}, K_{xy} и K_{yx}

$$k_{ii}^{yy} = M\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} [x(t_j + \tau_j) + \xi_j]\, \varphi(t_i - t_j - \tau_j)\right)^2\right\},$$

$$k_{ii}^{yx} = k_{ii}^{xy} = M\left\{x(t_i) \sum_{j=1}^{n} [x(t_j + \tau_j) + \xi_j]\, \varphi(t_i - t_j - \tau_j)\right\}$$

зависят от апостериорных знаний временных погрешностей отсчетов τ_j. Нетрудно убедиться, что общий максимум (5) достигается при $\tau_j \equiv 0$, так как

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \tau_j}\right|_{\tau_j=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial^2 I}{\partial \tau_j^2}\right|_{\tau_j=0} < 0.$$

Следовательно, если временные смещения отсчетов известны точно, то влияние всех других отсчетов на величину данного диагонального элемента может быть устранено. При этом количество информации не уменьшится. Тогда

$$k_{ii}^{xy} = k_{ii}^{yx} = M\{x(t_i)\,[x(t_i + \tau_i) + \xi_i]\, \varphi(\tau_i)\} = \sigma_x^2 r(\tau_i)\, \varphi(\tau_i),$$

где $r(\tau)$ — нормированная корреляционная функция процесса $x(t)$;

$$k_{ii}^{yy} = M\{[x(t_i+\tau_i)+\xi_i]^2\varphi^2(\tau_i)\} = (\sigma_x^2+\sigma_\xi^2)\,\varphi^2(\tau_i)$$

при условии (обычно имеющем место), что

$$M\{x(t_i+\tau_i)\,\xi_i\} = 0 \quad \text{и} \quad M\{\xi_i^2\} = \sigma_\xi^2.$$

Учитывая, что диагональные элементы матрицы в знаменателе выражения (5) определяются равенством

$$k_{ii}^{yy} - k_{ii}^{yx}\frac{1}{k_{ii}^{xx}}k_{ii}^{xy} = (\sigma_x^2+\sigma_\xi^2)\,\varphi^2(\tau_i)\left[1-\frac{\sigma_x^2 r^2(\tau_i)}{\sigma_x^2+\sigma_\xi^2}\right],$$

нетрудно получить

$$I(X, Y) \leqslant -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln\left[1-\frac{\sigma_x^2 r^2(\tau_i)}{\sigma_x^2+\sigma_\xi^2}\right]$$

или

$$I(X, Y) \leqslant \frac{n}{2}\ln(1+h^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln\{1+h^2[1-r^2(\tau_i)]\}, \qquad (6)$$

где $h^2 = \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_\xi^2}$ — отношение сигнал/шум в системе.

Конечное выражение для количества информации в сообщении с возмущенными временными координатами получается усреднением (6) по случайным аргументам τ_i:

$$\overline{I(X, Y)} = \frac{n}{2}\ln(1+h^2) - \frac{1}{2}\int_T\int_T\cdots\int_T w(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\sum_{i=1}^{n}\ln\{1+h^2[1-$$
$$-r^2(\tau_i)]\}\,d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_n, \qquad (7)$$

где $w(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ — многомерная плотность вероятностей смещений отсчетов по времени.

Таким образом, количество информации в сигнале со случайными возмущениями пространственных и временных координат не зависит от вида разложения исходной функции $x(t)$, а определяется отношением сигнал/шум, видом корреляционной функции процесса и статистикой временных погрешностей.

Оценка удельной информативности $\overline{I_0(X, Y)}$ (количества информации, переносимого одним отсчетом ряда (2)) может быть получена при конкретизации величин выражения (7).

Для предельно сжатого сообщения, имеющего вид ограниченного по полосе F «белого» шума [5] с корреляционной функцией

$$r(t) = \frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft}, \qquad (8)$$

период следования отсчетов $T_0 = \dfrac{1}{2F}$.

Представляется оправданным допущение о марковском характере и нормальном законе распределения возмущений τ_i временного положения отсчетов [6]. В этом случае многомерная плотность вероятностей случайных временных смещений отсчетов определяется произведением начальной априорной и условных плотностей вероятностей (функций перехода):

$$w(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = w(\tau_1)\, w(\tau_2|\tau_1) \ldots w(\tau_n|\tau_{n-1}). \qquad (9)$$

Для нормального марковского случайного процесса с характерной для временных флюктуаций экспоненциальной корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma_\tau^2 \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_\tau}\right)$$

функция перехода имеет вид [7]

... остальных отсчетов равны нулю, функция перехода несколько упростится:

$$w(\tau_i/\tau_{i-1}) = w(\tau_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau^2\left(1 - e^{-\frac{2T_0}{T_\tau}}\right)}} \exp\left[-\frac{\tau_i^2}{2\sigma_\tau^2\left(1 - e^{-\frac{2T_0}{T_\tau}}\right)}\right] \qquad (10)$$

и соответственно трансформируется многомерная плотность вероятностей (9).

Подстановка (8), (9) и (10) в (7) позволяет получить решение в явном виде. Практический интерес представляют малые временные смещения отсчетов ряда (2). Считая малой величину относительной дисперсии смещений $\tau_0 = \frac{\sigma_\tau}{T_0}$, при интегрировании (7) можно использовать приближения

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{3},$$

$$\ln(1 + ax^2) \approx ax^2$$

и получить следующее выражение для удельной информативности сообщения с возмущенными координатами времени:

$$\overline{I_0(X, Y)} \leqslant \frac{1}{2}\left\{\ln(1 + h^2) - \ln\left[1 + \frac{h^2\left(1 - e^{-\frac{2T_0}{T_\tau}}\right)\tau_0^2\pi^2}{3}\right]\right\}. \qquad (11)$$

Анализ полученных выражений показывает, что удельная информативность сигнала при наличии смещений во времени является функцией многих аргументов. Первый член выражения (11) представляет собой значение удельной информативности при невозмущенной временной координате. Второй член отражает снижение информативности из-за временных флюктуаций. При медленных изменениях временных смещений $T_\tau \gg T_0$ и при их малой относительной амплитуде τ_0 снижение информативности незначительно. Если же скорость флюктуаций времени велика $T_\tau \approx T_0$, то необходимо учитывать их величину. Действительно, при бесконечно большом отношении сигнал/шум в системе и $T_\tau = T_0$ удельная информативность определяется только величиной относительной временной погрешности:

$$\lim_{h^2 \to \infty} \overline{I_0(X, Y)} = \ln \frac{\sqrt{3}}{\tau_0 \pi \sqrt{1 - e^{-2}}}.$$

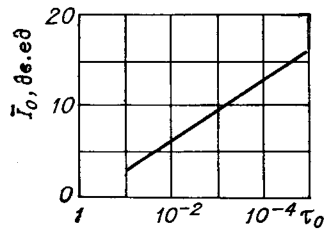

Рис. 1.

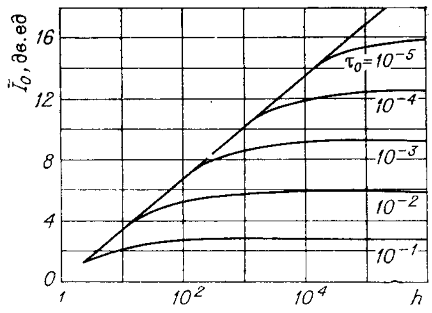

Рис. 2.

График предельной удельной информативности системы в зависимости от относительной величины быстрых флюктуаций времени ($T_\tau = T_0$) представлен на рис. 1. Для сравнения на рис. 2 дан график зависимости удельной информативности от отношения сигнал/шум при фиксированных значениях относительной величины смещений времени.

Из приведенных зависимостей видно, что флюктуации временных соотношений в сигнале принципиально приводят к снижению его информативности. Более того, смещения времени определяют верхнюю границу точности информационно-измерительной системы. Так, например, при величине относительной нестабильности времени $\tau_0 = 10^{-3}$ информативность системы не может превышать 9 двоичных единиц на один отсчет. Таким образом, используя полученные аналитические выражения и графики, можно определить требования к стабильности временных соотношений в измерительной системе, исходя из требуемой ее информативности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
2. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой же функции.— Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 1 (73).
3. А. Н. Колмогоров. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве.— Бюлл. МГУ 2, № 6, 1941.
4. А. Н. Колмогоров. Интерполирование и экстраполирование стационарных последовательностей.—Изв. АН СССР, сер. матем., 1941, т. 5, № 1.
5. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. М., «Иностранная литература», 1963.
6. А. Н. Малахов. Флуктуации в автоколебательных системах. М., «Наука», 1968.
7. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1. М., «Советское радио», 1969.

Поступила в редакцию 24 мая 1973 г.

УДК 62-50

К. К. ПАЩЕНКО, В. А. СТАНОВОВА

(*Караганда*)

О ТЕНЗОРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ ФИЛЬТРАЦИИ, ИДЕНТИФИКАЦИИ И РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

Регрессивные схемы, получившие название алгоритмов стохастической аппроксимации (СА), впервые были применены для скалярных последовательностей [1] и затем обобщены на векторные величины [2].