Предельная частота следования импульсов $f_в$ по каналу вычитания в предложенном реверсивном счетчике определяется исходя из условия

$$f \leqslant \frac{1}{(2n-3)\,\tau_З} \qquad (4)$$

Выражения (2), (3), (4) позволяют определять без большого труда $\tau_{ЛЗ}$, T_Σ и $f_в$ для заданного $\tau_З$ и n. Так, например, при $\tau_З = 0{,}1$ мкс и $n = 10$ $\tau_{ЛЗ} = 0{,}9$ мкс, $T_\Sigma \approx 1{,}8$ мкс, $f_в \approx 588$ кГц.

В заключение отметим, что на основе описанных схем (см. рис. 1, 2, 3) построены лабораторные образцы, испытания которых показали правильность предложенных принципов. Применение этих узлов в измерительно-информационных системах, в цифровых измерительных устройствах и в малых цифровых вычислительных машинах целесообразно и представляет определенный практический интерес.

Поступило в редакцию 29 мая 1972 г.;
окончательный вариант — 10 января 1973 г.

УДК 681.3.053

Я. Л. ЛИБЕРМАН

(Свердловск)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ СИНТЕЗА КОДОВЫХ КОЛЕЦ

В последние годы в аналого-цифровых преобразователях различного назначения все шире используются кодовые кольца, n-членные отрезки которых представляют собой комбинации, принадлежащие некоторому числопозиционному коду [1, 2]. Использование их позволяет существенно упростить кодирующие устройства и сократить объем оборудования. В работе анализируется один из наиболее простых алгоритмов синтеза таких колец, предложенный автором настоящей статьи, который состоит в следующем:

1) формируется исходная числовая последовательность $T_1 = \{t\}$ вида

$$0\underbrace{00\ldots0}_{n-1}\,1\,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}\,2\,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}\,3\,0\ldots0\,(m-3)\,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}(m-2)\,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}\,(m-1),$$

где m — основание кода, реализуемого кольцом;

2) последовательность T_1 преобразуется в последовательность T_2 отбрасыванием членов $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$;

3) производится проверка равенства длины последовательности T_2 единице (если равенство не выполняется, то производится операция по п. 4, если выполняется — по п. 6);

4) из последовательности T_2 путем увеличения на единицу членов t_{kn}; t_{kn} и t_{kn-1}; t_{kn}, t_{kn-1} и t_{kn-2}; …; $t_{kn}, t_{kn-1}, t_{kn-2}, \ldots, t_{kn-(n-2)}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, формируются последовательности $T_3, T_4, T_5, \ldots, T_{n+1}$;

5) последовательность T_{n+1} принимается за T_1 и производится переход к п. 2;

6) последовательность T_2 преобразуется в $(n-1)$-членную последовательность T_2' вида

$$(m-1)(m-1)\ldots(m-1);$$

7) последовательности, полученные по п. п. 1, 4, 6, выписываются друг за другом в порядке формирования.

Пусть, например, требуется синтезировать кодовое кольцо, реализующее комбинации числопозиционного кода с $n=3$ и $m=4$. Тогда в соответствии с п. 1 исходная последовательность примет вид 0001002003. Далее по п. 2 получится последовательность 1002003, а из нее по п. 4 — последовательности 1012013 и 1112113. После этого, согласно пп. 5 и 2, найдется последовательность 2113, из которой по п. 4 получатся последовательности 2123 и 2223. И наконец, в соответствии с пп. 5, 2 и 3 найдется последовательность, состоящая лишь из члена 3, повторение которого по п. 6 образует последовательность 33. Если теперь по п. 7 выписать друг за другом последовательности, сформированные по пп. 1, 4 и 6, то получится кодовое кольцо

—0001002003101201311121321232223333

Достоинства описанного алгоритма очевидны (он пригоден как для машинной, так и для «ручной» реализации; от кольца, синтезированного с его помощью, всегда можно отбросить отрезок любой длины, не исключая возможность использования оставшейся части в качестве кодового кольца, и т. д.), однако область его применения еще неширока. Одной из причин этого является недостаточная изученность возможностей алгоритма. В частности, неизвестно, какова длина синтезируемых по нему колец, возможна ли реализация безызбыточных и полных числопозиционных кодов и т. п. Эти вопросы и анализируются в настоящей работе.

Совершенно ясно, что последовательности, из которых синтезируется кодовое кольцо, имеют m различных длин: $mn-n+1$, $mn-2n+1$, $mn-3n+1, \ldots, mn-(m-2)n+1$, $mn-(m-1)n+1$ и $n-1$. Причем последовательности наибольшей и наименьшей длины используются по одному разу, а остальные — по $n-1$ раз. Отсюда следует, что кодовое кольцо, синтезированное по рассмотренному алгоритму, имеет длину

$$N=(mn-n+1)+(n-1)\sum_{s=2}^{m-1}(mn-sn+1)+(n-1)$$

или после преобразования

$$N=(n-1)\left[n\left(1-m\frac{m-1}{2}\right)+(mn+1)(m-1)\right]+n(m-1)+1. \tag{1}$$

С помощью (1) можно найти условие реализации безызбыточных кодов.

Как известно [3], избыточность всякого кода может быть определена из соотношения

$$R=1-\frac{]\log_m M[}{n},$$

где R — коэффициент избыточности, M — объем кода, m — основание, n — блочность.

Для безызбыточных кодов $R=0$ и $n=]\log_m M[$. Последнее возможно лишь при $M>m^{n-1}$ или, в анализируемом случае, при

$$N>m^{n-1}. \tag{2}$$

В связи с этим, подставляя (1) в (2), получим условие реализации безызбыточных кодов:

$$2m^{n-1}-(n^2-n)m^2+(3n^2-7n+2)m+(6n-2n^2-4)<0. \tag{3}$$

Обычными методами неравенство (3) неразрешимо, поэтому для отыскания его решений был использован прямой перебор. Перебор позволил предположить, что решениями неравенства (3) являются $m>1$ при $n<4$. Действительно, при $n=1, 2, 3$ соотношение (3) вырождается соответственно в соотношения $2-2m<0$, $2m-2m^2<0$ и $(m-1)^2>0$, справедливые только при $m>1$. Если же $n\geqslant 4$, то неравенство (3) решений не имеет. Последнее необходимо доказать.

Для доказательства левую часть (3) обозначим $f(m, n)$ и предположим вначале, что $n=4$. Тогда (3) примет вид

$$f(m,4)=m^3-6m^2+11m-6<0. \tag{4}$$

Легко установить, что

$$f(1,4)=f(2,4)=f(3,4)=0; \quad f(4,4)=6.$$

При $m\geqslant 4$ $f(m, 4)$ монотонно возрастает и, следовательно, всегда будет больше 0. Действительно, для роста $f(m, 4)$ при увеличении m необходимо выполнение условия

$$\frac{df(m,4)}{dm}>0$$

или

$$3m^2-12m+11>0.$$

Но это условие выполняется уже при $m>2+1/\sqrt{3}$. Таким образом, при $n=4$ и любых m $f(m, n)\geqslant 0$ и неравенство (4) решений не имеет.

Покажем далее, что при возрастании n свыше 4 $f(m, n)$ также растет. Пусть $n_1=k$ и $n_2=k+1$. Тогда для увеличения $f(m, n)$ при возрастании n требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$f(m,k+1)-f(m,k)>0$$

или после подстановки и преобразования

$$\begin{cases} m^{k-1}-km+2k+2>0; \\ m-1>0. \end{cases} \tag{5}$$

Но выполнение (5) при $k>4$ очевидно и, следовательно, неравенство (3) при $n>4$ при любых m решений также не имеет.

Рассмотрим далее вопрос о реализации полных кодов.

Условие реализации полных кодов состоит в том, что $N = m^n$ [4] или после подстановки (1)

$$2m^n - (n^2 - n) m^2 + (3n^2 - 7n + 2) m + (6n - 2n^2 - 4) = 0. \qquad (6)$$

Решить уравнение (6) обычными методами также невозможно, поэтому для отыскания его корней следует провести специальный анализ. Анализ целесообразно начать с определения области допустимых значений m. При $n=1$, 2 для этого достаточно подставить n в (6). В результате такой подстановки уравнение обращается в равенство, справедливое при любых m. Если же $n>2$, то для установления области допустимых значений m удобно воспользоваться следующей теоремой [5]: если первые k коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ действительного алгебраического уравнения неотрицательны (a_k — первый отрицательный коэффициент), то все положительные корни уравнения (если они есть) меньше $\alpha = 1 + \sqrt[k]{q/a_0}$, где q — наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов.

В общем случае уравнение (6) трансцендентно. Для того, чтобы его рассматривать как действительное алгебраическое и иметь возможность вычислять α, необходимо задаваться n. Пусть, например, $n=3$, 4, 5. Тогда α соответственно равно 4; 3,44; 3,28. При дальнейшем увеличении n значения α образуют убывающую числовую последовательность, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha = 2$. Это позволяет утверждать, что при любых $n>2$ все положительные значения m, являющиеся корнями уравнения (6) (если они есть), меньше 4. В связи с тем, что m может принимать только целочисленные значения, решение уравнения (6) при $n>2$ сводится к решениям уравнений с $m=1$, 2, 3. При $m=1$ (6) превращается в равенство, справедливое при любых n; при $m=2$

$$2^{n-1} - n = 0, \qquad (7)$$

а при $m=3$

$$3^n - n^2 - 3n + 1 = 0. \qquad (8)$$

Как легко установить графически, корнями трансцендентных уравнений (7) и (8) являются $n=1$, 2. Поскольку решение $m=1$ и $n>1$ лишено смысла, можно полагать, что уравнение (6) имеет лишь корни $n=1$, 2 при $m>1$.

Из всего изложенного следует, что рассмотренный в начале статьи алгоритм синтеза кодовых колец позволяет реализовать безызбыточные и полные коды практически с любым основанием, но с ограниченной блочностью. Последнее, разумеется, сужает область применения алгоритма, однако не является серьезным недостатком, так как в настоящее время известны эффективные методы увеличения блочности кодов, реализуемых кодовыми кольцами [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Янбых. Применение кодовых колец типа D в кодирующих преобразователях.— Техническая кибернетика, 1964, № 1.
2. О. Н. Дегтярев. Об одной группе кодовых колец для двоично-десятичных цифраторов перемещений.— Автометрия, 1968, № 4.
3. А. П. Удалов, Б. А. Супрун. Избыточное кодирование при передаче информации двоичными кодами. М., «Связь», 1964.
4. Ф. Е. Темников и др. Теоретические основы информационной техники. М., «Энергия», 1971.
5. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
6. А. Н. Радченко. Способ повышения порядка кодовых колец.— В кн. «Сборник работ по вопросам электромеханики» (институт электромеханики АН СССР), вып. 4, М.— Л., 1960.
7. Г. Ф. Янбых. Способ преобразования кодовых колец и устройство для его осуществления. Авторское свидетельство СССР № 136593, кл. 42 т., 14. БИ, 1961, № 5.

Поступило в редакцию 11 февраля 1972 г.,
окончательный вариант—9 июля 1973 г.