дящий тактовый момент. Это позволяет реализовать разнообразные программы управления перемещением каретки по сложным кривым, составленные с учетом динамических характеристик привода. Устройство обеспечивает заданную скорость перемещения каретки по координате с погрешностью 3—5% в диапазоне от 1,2 мкм/с до 19 мм/с.

Устройство связи автомата с ЭВМ выполнено в программно-управляемом магистральном модульном варианте (стандарте САМАС) и допускает одновременную работу двух комплектов автомата с одной машиной серии ЕС.

На рис. 1 и 2 приведен внешний вид экспериментального макета фотограмметрического автомата.

Поступила в редакцию 25 февраля 1974 г.

УДК 62-50.007

А. А. НЕСТЕРОВ

(Новосибирск)

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРАФОПОСТРОИТЕЛЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ АНАЛОГОВЫМ ПРИВОДОМ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ЗАДАНИИ КРИВОЙ

В * предложен метод формирования управляющих воздействий, обеспечивающих оптимальное по быстродействию перемещение пишущего устройства графопостроителя. При этом предполагалось, что изображаемая кривая задается в неявной форме уравнением

$$g(x, y)=0. \tag{1}$$

Однако в некоторых случаях техническая реализация может оказаться более простой при параметрическом задании кривой. В данной заметке описывается модификация алгоритма управления, приведенного в ** для этой ситуации.

Как и в ***, будем предполагать, что движение пера описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x; \\ \frac{dv_x}{dt} &= f_1(v_x)+k_1u_1; \\ \frac{dy}{dt} &= v_y; \\ \frac{dv_y}{dt} &= f_2(v_y)+k_2u_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где v_x и v_y — скорости перемещения пера по координатам x и y соответственно; управляющие параметры u_1 и u_2 подчинены ограничениям

$$|u_1|\leqslant 1; \quad |u_2|\leqslant 1. \tag{3}$$

---

* В. М. Александров, Н. Н. Карлсон, Н. П. Филиппова, А. А. Нестеров. Оптимальное управление приводом в системе графического вывода.— Автометрия, 1973, № 2.

** См. указ. соч.

*** См. указ. соч.

Требуется перевести объект, описываемый уравнениями (2), из начальной точки (x_0, y_0), лежащей на изображаемой кривой L, в точку (x_1, y_1), также лежащую на этой кривой, за минимальное время и таким образом, чтобы перо графопостроителя прошло по кривой L.

В * показано, что необходимым и достаточным условием движения пера по кривой L, заданной уравнением (1), является выполнение соотношения

$$g_x k_1 u_1 + g_y k_2 u_2 + f_1(v_x) g_x + f_2(v_y) g_y + v_x^2 g_{xx} + 2v_x v_y g_{xy} + v_y^2 g_{yy} = 0, \quad (4)$$

где символами g_x, g_y, g_{xx}, g_{xy}, g_{yy} обозначены частные производные функции $g(x, y)$ по соответствующим переменным. В случае параметрического задания кривой выполнение соотношения (4) также обеспечивает движение по кривой L. Следует только выразить входящие в (4) величины через параметр, определяющий кривую L.

Итак, будем считать, что кривая задана уравнениями

$$x = X(l), \quad y = Y(l), \quad (5)$$

где l — некоторый параметр.

Предположим, кроме того, что на кривой нет особых точек, для которых выполняются соотношения

$$X'(l) = Y'(l) = 0.$$

(Если такие точки на изображаемой кривой имеются, то они должны проходиться с нулевой скоростью. Особые точки естественным образом разбивают кривую на участки, которые можно рассматривать отдельно. Моменты начала торможения можно определять с помощью ускоренной прогнозирующей модели.) Из уравнения (2) получаем

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dl}\frac{dl}{dt} = X'\dot{l}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dl}\frac{dl}{dt} = Y'\dot{l}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что пишущее устройство находится на кривой L в точке, в окрестности которой $X'(l) \neq 0$. При этом первое из соотношений (5) позволяет выразить параметр l через координату x:

$$l(x) = X^{-1}(x). \quad (7)$$

Следовательно, мы можем задать кривую L уравнением

$$g(x, y) = Y(l(x)) - y = 0. \quad (8)$$

При этом справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} & g_x = \frac{Y'}{X'}, \quad g_y = -1, \quad g_{xy} = g_{yy} = 0, \\ & g_{xx} = \frac{Y''}{(X')^2} - \frac{Y'X''}{(X')^3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив выражения (6) и (9) в (4), получим соотношение, которому должны удовлетворять параметры u_1 и u_2 при движении по кривой, заданной уравнениями (5):

$$Y'k_1u_1 - X'k_2u_2 = -Y'f_1(X'\dot{l}) + X'f_2(Y'\dot{l}) - (X'Y'' - Y'X'')\dot{l}^2. \quad (10)$$

Пусть теперь перо находится в точке, для которой $X'(l) = 0$. Если эта точка на кривой L не является особой, то в некоторой окрестности

---

* В. М. Александров, Н. Н. Карлсон, Н. П. Филиппова, А. А. Нестеров. Оптимальное управление приводом в системе графического вывода.— Автометрия, 1973, № 2.

этой точки должно выполняться соотношение $Y(l) \neq 0$, и, следовательно, кривая может быть задана уравнением

$$g(x, y) = X(l(y)) - x = 0. \tag{11}$$

Вычислив соответствующие производные и подставив их в (4), мы вновь получим соотношение (10).

Таким образом, для движения по кривой, заданной уравнениями (5), необходимо и достаточно, чтобы управляющие параметры удовлетворяли соотношению

$$Y'k_1u_1 - X'k_2u_2 = S, \tag{12}$$

где

$$S = -Y'f_1(X'\dot{l}) + X'f_2(Y'\dot{l}) - \dot{l}^2(X'Y'' - Y'X''). \tag{13}$$

В * показано, что при оптимальном по быстродействию управлении графопостроителем один из управляющих параметров должен находиться на границе области допустимых значений. Если учесть, что при движении по кривой в положительном направлении l растет во времени, то очевидно, что знак управляющего параметра, находящегося на границе области допустимых значений, должен совпадать со знаком производной от соответствующей координаты по l при разгоне и иметь противоположный знак при торможении. Таким образом, при разгоне

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{sign} X', \\ u_2 &= \frac{-S + k_1Y' \operatorname{sign} X'}{k_2X'}, \end{aligned}\right\} \quad \text{если } |u_2| \leqslant 1; \tag{14а}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{S + k_2X' \operatorname{sign} Y'}{k_1Y'}, \\ u_2 &= \operatorname{sign} Y', \end{aligned}\right\} \quad \text{если } |u_1| < 1. \tag{14б}$$

При торможении соответственно имеем:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\operatorname{sign} X', \\ u_2 &= \frac{-S - k_1Y' \operatorname{sign} X'}{k_2X'}, \end{aligned}\right\} \quad \text{если } |u_2| \leqslant 1; \tag{15а}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{S - k_2X' \operatorname{sign} Y'}{k_1Y'}, \\ u_2 &= -\operatorname{sign} Y', \end{aligned}\right\} \quad \text{если } |u_1| < 1. \tag{15б}$$

Следует отметить, что в соотношениях (14) и (15) могут выполняться либо условия (а), либо условия (б), либо, наконец, одновременно не выполняются ни условия (а), ни условия (б). Последнее возможно в том случае, когда $|S|$ имеет достаточно большое значение, т. е. несимметрия привода и центробежные ускорения таковы, что мощности привода не хватает для удержания пишущего устройства на кривой L. Случай, когда одновременно выполнены условия (а) и (б), невозможен. Покажем это, например, для соотношений (14).

Предположим, что одновременно справедливы соотношения (14а) и (14б), т. е. одновременно выполнены неравенства

$$\left|\frac{-S + k_1Y' \operatorname{sign} X'}{k_2X'}\right| < 1,$$

$$\left|\frac{S + k_2X' \operatorname{sign} Y'}{k_1Y'}\right| < 1. \tag{16}$$

---

* В. М. Александров, Н. Н. Карлсон, Н. П. Филиппова, А. А. Нестеров. Оптимальное управление приводом в системе графического вывода.— Автометрия, 1973, № 2.

Введем обозначения:

$$\alpha = k_1 |Y'| \geqslant 0, \quad \beta = k_2 |X'| \geqslant 0. \tag{17}$$

С учетом (17) неравенства (16) можно привести к виду:

$$-\beta < -S + \alpha \operatorname{sign}(X'Y') < \beta,$$
$$-\alpha < S + \beta \operatorname{sign}(X'Y') < \alpha.$$

Сложив почленно последние неравенства, получим

$$-(\alpha+\beta) < (\alpha+\beta) \operatorname{sign}(X'Y') < \alpha+\beta. \tag{18}$$

Неравенства (18) могут выполняться только при $\alpha=\beta=0$, что невозможно ни в какой точке кривой L, не являющейся особой. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Аналогичные рассуждения можно провести и для соотношений (15).

Соотношения (14) и (15) определяют управляющие параметры как функции l и $\dot{l}$. Эти последние, в свою очередь, должны быть определены из уравнений движения системы. Дифференцируя соотношения (6) по времени и учитывая (2), получим дифференциальные уравнения для $l(t)$:

$$X'\ddot{l} + X''\dot{l}^2 = f_1(X'\dot{l}) + k_1 u_1; \tag{19а}$$

$$Y'\ddot{l} + Y''\dot{l}^2 = f_2(Y'\dot{l}) + k_2 u_2; \tag{19б}$$

$$l(0) = \dot{l}(0) = 0; \quad \dot{l}(t) \geqslant 0. \tag{20}$$

Эти уравнения определяют параметр $l(t)$ и скорость его изменения $\dot{l}(t)$, обеспечивающую оптимальное по быстродействию движение по кривой. При этом удобно пользоваться уравнением (19а), когда справедливы соотношения (14а) или (15а), и уравнением (19б), когда справедливы соотношения (14б) или (15б).

Для компенсации ошибок управления целесообразно ввести корректирующие обратные связи по координатам x и y и скоростям v_x и v_y. Сигналами рассогласования в цепях обратных связей могут служить величины

$$\Delta x = x - X(l), \quad \Delta y = y - Y(l),$$

$\Delta v_x = v_x - X'\dot{l}$, $\Delta v_y = 0$, если справедливы соотношения (14а) или (15а); и $\Delta v_x = 0$, $\Delta v_y = v_y - Y'\dot{l}$, если справедливы соотношения (14б) или (15б). В последних соотношениях под величинами x, y, v_x, v_y следует понимать действительные координаты и скорости пера графопостроителя.

В заключение следует отметить, что точность всего устройства будет определяться точностью измерения ошибок Δx и Δy. При определении величин u_1 и u_2 с помощью соотношений (14) или (15) высокой точности не требуется, так как возникающие при этом ошибки устраняются с помощью обратных связей.

Поступила в редакцию
8 января 1974 г.