3. Ю. А. Болванов, В. В. Каргальцев, М. М. Карлинер, Э. А. Купер, А. В. Леденев, В. И. Нифонтов, А. Д. Орешков, Ю. И. Ощепков, Г. В. Пискунов. Система контроля и управления ускорительным комплексом на встречных пучках при помощи универсальной ЭВМ.— Труды конференции «Системы автоматизации научных исследований». Рига, «Зинатне», 1973.
4. М. М. Карлинер, В. И. Нифонтов, А. Д. Орешков. Прецизионный цифро-аналоговый преобразователь.— Автометрия, 1972, № 2.
5. Ю. А. Болванов, Э. А. Купер, В. И. Нифонтов, А. Д. Орешков. Многоканальный прецизионный АЦП с повышенной помехозащищенностью.— Труды II Всесоюзного симпозиума «Проблемы преобразования формы информации». Киев, «Наукова думка», 1973.

*Поступила в редакцию 17 декабря 1973 г.*

---

УДК 512.52

**С. В. ДОЦЕНКО, Ю. А. ХУДЯКОВ**

*(Севастополь)*

# О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРОЦЕССА ПО ДИСКРЕТНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ С ПОМОЩЬЮ СКОЛЬЗЯЩЕГО ПОЛИНОМА

При измерении физических процессов и передаче данных о них широко применяется дискретизация процессов по времени, позволяющая наиболее рационально использовать каналы связи и вычислительные средства. Однако часто после приема данных возникает необходимость в восстановлении непрерывного исходного процесса по этим данным. Это достижимо путем применения различных методов интерполяции промежуточных значений процесса по дискретному набору его значений в точках отсчета. Наиболее известными методами восстановления являются интерполяция с помощью полиномов, применение ряда Котельникова, сплайн-интерполяция и т. д. При измерении длительных, но конечных процессов первые два способа мало пригодны для практического использования, так как в первом случае с увеличением числа узлов интерполяции растет степень полинома и объем необходимых вычислений, во втором — требуется бесконечная последовательность результатов измерений.

В настоящей работе рассматривается интерполяция произвольной последовательности с помощью скользящего полинома фиксированной степени и исследуются предельные свойства интерполяционной функции при увеличении степени полинома. Предлагаемый метод имеет определенные преимущества при обработке непрерывно поступающих данных с помощью ЭВМ. Теорема, доказываемая ниже, показывает тесную связь интерполяции с помощью скользящего полинома и ряда Котельникова.

Предположим, что результатом измерения процесса $x(t)$ является последовательность чисел $\{x_k\}$, $-\infty<k<+\infty$, где элемент последовательности $x_k$ соответствует моменту времени $k\tau$. Интервал времени $\tau$ между соседними членами последовательности будем считать постоянным. Рассмотрим интерполяцию промежуточных точек процесса с помощью скользящего полинома. Для получения интерполяционной функции через каждые $n+1$ последовательные точки $x_k, \ldots, x_{k+n}$ проведем полином одной и той же степени $n$. На рис. 1, *а* показано использование полинома второй степени: через каждые три последовательные точки проводится парабола. Каждый полином интерполирует измеряемый про-

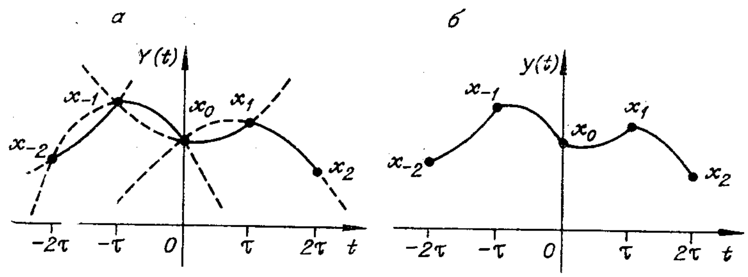


*Рис. 1.*

цесс во всех точках временной оси, причем значения различных полиномов, взятые в один и тот же момент времени, вообще говоря, не совпадают. Поэтому после получения полинома, проходящего через очередные точки $x_k, \ldots, x_{k+n}$, будем присваивать значениям искомой интерполяционной функции его значения не на всей оси, а только на некотором интервале длиной $\tau$, расположенном между моментами времени $k\tau$ и $(k+n)\tau$, соответствующими крайним узлам интерполяции для данного полинома. В результате будет получена однозначная интерполяционная функция со значениями, «сшитыми» из отдельных частей полиномов. На рис. 1, *б* показан пример интерполяционной функции, полученной с помощью полиномов, изображенных на рис. 1, *а*: значения полинома, проходящего через узлы $x_k$, $x_{k+1}$, $x_{k+2}$, присваиваются значениям интерполяционной функции на интервале $[(k+1)\tau,\ (k+2)\tau)$. Полином степени $n$, проходящий через точки $x_k, \ldots, x_{k+n}$ соответственно в моменты времени $k\tau, \ldots, (k+n)\tau$, представляет собой интерполяционный многочлен Лагранжа [1]:

$$Y(t) = (-1)^n \frac{(t-k\tau)(t-(k+1)\tau)\ldots(t-(k+n)\tau)}{\tau^n n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{C_n^i x_{k+i}}{t-(k+i)\tau}. \tag{1}$$

Для дальнейших рассуждений введем функцию-ступеньку, которую определим следующим образом:

$$f^0(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \xi < \tau; \\ 0, & \xi < 0,\ \xi \geqslant \tau. \end{cases}$$

Умножив выражение (1) на $f^0(t-k\tau+\tau')$, получим функцию со значениями, равными значениям полинома только на интервале $[k\tau-\tau',\ (k+1)\tau-\tau')$, и значениями, равными нулю в остальных точках. Параметр $\tau' \in [-n\tau, \tau)$ определяет расположение данного интервала относительно рассматриваемых моментов времени $k\tau, \ldots, (k+n)\tau$. Так, например, значение $\tau' = -\frac{n-1}{2}\tau$ соответствует расположению рассматриваемого интервала в середине отрезка $[k\tau, (k+n)\tau]$. Просуммировав полиномы (1), умноженные на функцию $f^0(t-k\tau+\tau')$, по всем значениям $k$, получим искомую интерполяционную формулу, восстанавливающую процесс на всей временной оси:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{(t-k\tau)(t-(k+1)\tau)\ldots(t-(k+n)\tau)}{\tau^n n!} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{C_n^i x_{k+i}}{t-(k+i)\tau} f^0(t-k\tau+\tau'). \tag{2}$$

Формула (2) неудобна для практического применения, поскольку в ней значения процесса $x_k$ в одних и тех же точках отсчета $k\tau$ повторяются многократно. Найдем представление интерполирующей функции в форме

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k f_k(t), \tag{3}$$

где $f_k(t)$ — базовые функции и определим вид последних. После несложных преобразований (2) получим

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{(-1)^n}{\tau^n n!\,(t-k\tau)} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (t-(k-i)\tau)\ldots$$
$$\ldots(t-(k+n-i)\tau) f^0(t-(k-i)\tau+\tau'). \tag{4}$$

Отсюда следует выражение для базовых функций

$$f_k(t)=\frac{(-1)^n}{\tau^n n!\,(t-k\tau)} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (t-(k-i)\tau)\ldots\times$$
$$\times\ldots(t-(k+n-i)\tau) f^0(t-(k-i)\tau+\tau').$$

Анализ этой формулы показывает, что семейство функций $f_k(t)$ может быть выражено через одну функцию $\psi_n(z)$ (индекс $n$ указывает на степень скользящего полинома), а именно:

$$f_k(t)=\psi_n(t-k\tau),$$

где

$$\psi_n(z)=\frac{(-1)^n}{\tau^n n!\,z} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (z+i\tau)(z+(i-1)\tau)\ldots\times$$
$$\times\ldots(z+(i-n)\tau) f^0(z+i\tau+\tau'). \tag{5}$$

На рис. 2 приведены графики функций $\psi_0(z)$ (кривая *1*), $\psi_1(z)$ (кривая *2*) и $\psi_2(z)$ (кривая *3*) для $\tau'=-\frac{n-1}{2}\tau$. Используя полученную функцию $\psi_n(z)$, можно записать равенство (3) в виде

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \psi_n(t-k\tau). \tag{6}$$

Из анализа (5) следует, что функция $\psi_n(z)$ является финитной: вне интервала $[-n\tau-\tau',\ \tau-\tau')$ ее значения тождественно равны нулю. Следовательно, при вычислении значения интерполяционной функции (6) в данный момент времени требуется знание лишь конечного числа отсчетов $x_k$ измеряемого процесса, так как коэффициенты при значениях остальных отсчетов обращаются в нуль.

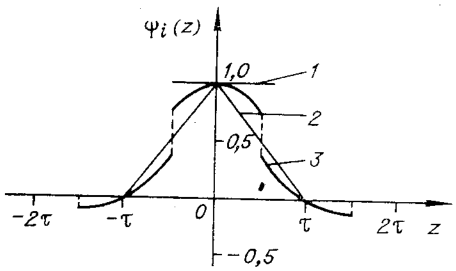


*Рис. 2.*

Значительный интерес представляет исследование поведения функции $\psi_n(z)$ при увеличении степени полинома $n$. В случае, когда значения скользящего полинома (1) присваиваются значениям интерполяционной функции в середине области, на которой расположены соответствующие узлы интерполяции, т. е. при $\tau'=-\frac{n-1}{2}\tau$, имеет место следующая теорема: справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(z)=\frac{\sin\frac{\pi z}{\tau}}{\frac{\pi z}{\tau}}.$$

Доказательство. Приведем доказательство теоремы сначала для четных $n$. Пусть $n=2l$, где $l=0, 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\psi_{2l}(z)=\frac{(-1)^{2l}}{\tau^{2l}(2l)!\,z}\sum_{i=0}^{2l}(-1)^i C_{2l}^i (z+i\tau)\ldots(z+(i-2l)\tau)\times$$
$$\times f^0\left(z-\tau\left(\frac{2l-1}{2}-i\right)\right).$$

Из определения функции $f^0$ следует, что при заданном значении $z$ в выражении для $\psi_{2l}(z)$ останется одно слагаемое и, кроме того, разность $\frac{2l-1}{2}-i$, входящая в аргумент функции $f^0$, остается постоянной при изменении числа $l$, т. е. номер $i$-го слагаемого, не равного тождественно нулю, изменяется пропорционально степени полинома. Введем новый параметр: пусть $i=l+q$, где $q$ — целое число; тогда из сказанного выше следует, что $q$ не зависит от $l$ и однозначно определяется величиной переменной $z$. Так как номер слагаемого $i$ удовлетворяет неравенству $0\leqslant i\leqslant n$, то, следовательно, справедливо условие $-l\leqslant q\leqslant l$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $q\geqslant 1$. Тогда

$$\psi_{2l}(z)=\frac{(-1)^{l+q}C_{2l}^{l+q}(z+(l+q)\tau)\ldots(z+(l-q+1)\tau)[(z+(l-q)\tau)\ldots}{\tau^{2l}(2l)!\,z}\to$$
$$\to\frac{\ldots(z+\tau)z(z-\tau)\ldots(z-(l-q)\tau)]}{}.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, можно представить, как произведение разностей квадратов. В результате получим

$$\psi_{2l}(z)=\frac{(-1)^{l+q}C_{2l}^{l+q}(z+(l+q)\tau)\ldots(z+(l-q+1)\tau)}{\tau^{2l}(2l)!}\prod_{m=1}^{l-q}(z^2-m^2\tau^2)=$$
$$=\left(\frac{z}{\tau(l+q)}+1\right)\ldots\left(\frac{z}{\tau(l-q+1)}+1\right)\prod_{m=1}^{l-q}\left(1-\frac{\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}{m^2}\right).$$

Число сомножителей перед знаком суммы равно $2q$ и, следовательно, как было показано выше, не зависит от числа $l$. Каждый из сомножителей при росте $l$ стремится к единице, а предельное значение базовой функции — к бесконечному произведению, которое может быть выражено через тригонометрическую функцию [2]:

$$\lim_{l\to\infty}\psi_{2l}(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}{m^2}\right)=\frac{\sin\frac{\pi z}{\tau}}{\frac{\pi z}{\tau}}.$$

2. Пусть $q\leqslant -1$. Тогда

$$\psi_{2l}(z)=\frac{(-1)^{l+q}C_{2l}^{l+q}[(z+(l+q)\tau)\ldots(z+\tau)z(z-\tau)\ldots(z-(l+q)\tau)]}{\tau^{2l}(2l)!\,z}\to$$
$$\to\frac{(z-(l+q+1)\tau)\ldots(z-(l-q)\tau)}{}=\frac{(-1)^{l+q}C_{2l}^{l+q}(z-(l+q+1)\tau)\ldots}{\tau^{2l}(2l)!}\times$$
$$\times\frac{\ldots(z-(l-q)\tau)}{}\prod_{m=1}^{l+q}(z^2-m^2\tau^2)=\left(1-\frac{z}{\tau(l+q+1)}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{z}{\tau(l-q)}\right)\prod_{m=1}^{l+q}\left(1-\frac{\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}{m^2}\right).$$

Отсюда, как и в случае 1, следует, что

$$\lim_{l\to\infty}\psi_{2l}(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}{m^2}\right)=\frac{\sin\frac{\pi z}{\tau}}{\frac{\pi z}{\tau}}.$$

3. Пусть $q=0$. Тогда

$$\psi_{2l}(z)=\frac{(-1)^l C_{2l}^l z}{\tau^{2l}(2l)!\,z}\prod_{m=1}^{l}(z^2-m^2\tau^2)=\prod_{m=1}^{l}\left(1-\frac{\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}{m^2}\right).$$

Следовательно, здесь, как и выше,

$$\lim_{l\to\infty}\psi_{2l}(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}{m^2}\right)=\frac{\sin\frac{\pi z}{\tau}}{\frac{\pi z}{\tau}}.$$

Доказательство утверждения теоремы при $n=2l+1$, где $l=0, 1, 2, \ldots$, проводится аналогично доказательству для случая чётных значений степени скользящего полинома $n$. Нетрудно видеть, что из сходимости последовательностей $\psi_{2l}(z)$ и $\psi_{2l+1}(z)$ следует сходимость последовательности $\psi_n(z)$, где $n=0, 1, 2, \ldots$ Теорема доказана.

Используя утверждение теоремы, можно записать равенство (3) для интерполяции скользящим полиномом бесконечного порядка:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_k\frac{\sin\frac{\pi(t-k\tau)}{\tau}}{\frac{\pi(t-k\tau)}{\tau}}. \tag{7}$$

Выражение (7) позволяет проводить оценку «сверху» интерполяционных формул при использовании скользящего полинома произвольной степени.

Соотношение (7) показывает, что в пределе формула интерполирования с помощью скользящего полинома совпадает с рядом Котельникова. Известно, что с помощью ряда Котельникова можно точно восстанавливать функции с финитным спектром. Отсюда следует вывод, что интерполяционная функция (4) при использовании полинома бесконечной степени точно восстанавливает (при надлежащем выборе интервала дискретизации $\tau$) измеряемый процесс в случае, когда последний имеет финитный спектр.

## ЛИТЕРАТУРА


1. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. I. М., Физматгиз, 1962.
2. Н. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1962.


*Поступила в редакцию 23 ноября 1972 г.*