$$K_U(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \left[-K_{24} - m_f^2\right] \exp\{-[m_{\eta(t_1')} + m_{\eta(t_2')}] +$$

$$+ \frac{1}{2}[K_{11} + K_{33} + 2K_{13}]\}\, dt_1' d_2' - \overline{U(t_1)}\,\overline{U(t_2)}. \qquad (8')$$

Если случайные функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ имели бы закон распределения, отличный от нормального, то для получения соответствующих формул достаточно было бы воспользоваться разложением заданного закона распределения в ряд Эджворта [4].

Полагая в исходном уравнении

$$\varphi(t) = i\alpha[1+\psi(t)],\; f(t) = v_1(t) + iw_1(t),$$

где $\psi(t)$, $v_1(t)$, $w_1(t)$ — нормально распределенные стационарные случайные функции, а α — число, получим результаты, изложенные в [1]. Результаты [2] вытекают из приводимых здесь, если положить

$$f(t) = \varphi(t)\theta(t),$$

где $\theta(t)$ — нормально распределенная стационарная случайная функция.

Выведенные формулы (6) и (8) являются основой вероятностного анализа любых линейных измерительных систем первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Свешников. О движении гироскопического маятника при случайных перемещениях его точки подвеса.— Прикладная математика и механика, 1962, т. XXVI, вып. 3.
2. А. М. Азизов, В. А. Иванов. О погрешностях определения характеристик случайных процессов с помощью измерительных преобразователей со случайно меняющимися параметрами.— V Всесоюзный симпозиум «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Вильнюс, 1972.
3. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
4. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.

Поступило в редакцию 19 марта 1973 г.

УДК 629.7.036 : 519.27

В. В. ТИХОМИРОВ, М. Н. ХАЛИТОВ

(Рыбинск)

О ПРИМЕНЕНИИ ПОЛИНОМОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА В ЗАДАЧАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ

При получении динамической характеристики газотурбинного двигателя как объекта регулирования необходимо по осциллограммам переходных процессов разгона и дросселирования двигателя $f(t)$ получить производную переходного процесса $f'(t)$ [1]. Переходный процесс $f(t)$ регистрируется в n^*+1 точках с равномерным шагом по времени t. Для автоматизации построения динамики объекта регулирования на ЭВМ необходим такой математический аппарат, который позволил бы получить аналитическое выражение как для переходного процесса $f(t)$, так и для его производной $f'(t)$. Одним из аппаратов, обеспечивающих решение поставленной задачи, являются полиномы С. Н. Бернштейна

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k},$$

где $t \in [0, 1]$, $f\left(\frac{k}{n}\right)$ — значения функции в узлах $t_k = k/n$, которые обладают тем замечательным свойством, что при равномерном стремлении $B_n(t)$ к $f(t)$ производная $B_n'(t)$ равномерно стремится к $f'(t)$ [2]. Однако полиномы С. Н. Бернштейна требуют для получения удовлетворительной точности аппроксимации больших значений n. Кроме того, у этого аппарата нет оценки погрешности аппроксимации.

В данной работе на базе полиномов С. Н. Бернштейна построены полиномы

$$T_{n,m}(t) = \frac{n}{m}[B_{n+m}(t) - B_n(t)] + B_n(t),$$

$$P_{n,m}(t) = T_{n,m}(t) - B_n(t) + B_{n+m}(t),$$

где m — целое положительное число, и функции

$$F_n(t) = \frac{[B_{n+2}(t) - B_n(t)]\,[B_{n+1}(t) - B_n(t)]}{2B_{n+1}(t) - [B_{n+2}(t) + B_n(t)]} + B_{n+1}(t),$$

$$\Phi_n(t) = F_n(t) - B_{n+1}(t) + B_n(t),$$

где $F_n(t) = \Phi_n(t) = B_n(t)$ при $2B_{n+1}(t) - [B_{n+2}(t) + B_n(t)] = 0$, аппроксимирующие $f(t)$ при $n \to \infty$.

Производные $T'_{n,m}(t)$, $P'_{n,m}(t)$,

$$F'_n(t) = \frac{\left[B'_{n+2}(t) - B'_n(t)\right]\left[B'_{n+1}(t) - B'_n(t)\right]}{2B'_{n+1}(t) - \left[B'_{n+2}(t) + B'_n(t)\right]} + B'_{n+1}(t),$$

$$\Phi'_n(t) = F'_n(t) - B'_{n+1}(t) + B'_n(t),$$

где $F'_n(t) = \Phi'_n(t) = B'_n(t)$ при $2B'_{n+1}(t) - \left[B'_{n+2}(t) + B'_n(t)\right] = 0$, аппроксимируют $f'(t)$ при $n \to \infty$.

Опираясь на асимптотическое равенство (28) ([2], стр. 142), теорему С. Н. Бернштейна о равномерном стремлении $B_{n+m}(t)$ к $f(t)$ ([3], стр. 23), теорему о равномерном стремлении $B'_{n+m}(t)$ к $f'(t)$ ([3], стр. 251), можно показать, что если аппроксимация $f(t)$ полиномами $B_n(t)$ порядка $1/n$ и аппроксимация $f'(t)$ полиномами $B'_n(t)$ порядка α_n ($\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$), то

1) аппроксимация $f(t)$ полиномами $T_{n,m}(t)$ и функциями $F_n(t)$ порядка $1/n^2$;

2) аппроксимация $f(t)$ полиномами $P_{n,m}(t)$ и функциями $\Phi_n(t)$ более высокого порядка, чем $1/n^2$;

3) аппроксимация $f'(t)$ полиномами $T'_{n,m}(t)$ и функциями $F'_n(t)$ порядка α_n/n;

4) аппроксимация $f'(t)$ полиномами $P'_{n,m}(t)$ и функциями $\Phi'_n(t)$ более высокого порядка, чем α_n/n.

В случае $f''(t) = 0$ порядок аппроксимации в каждом из пунктов 1—4 более высокий.

Полиномы $T_{n,m}(t)$, $P_{n,m}(t)$ и $T'_{n,m}(t)$, $P'_{n,m}(t)$ равномерно аппроксимируют $f(t)$ и соответственно $f'(t)$. Так как аппроксимация функции $f(t)$ полиномами $T_{n,m}(t)$ при $m = 1$ и функциями $F_n(t)$, начиная с некоторого N, идет с двух сторон, то это позволяет получить оценку абсолютной погрешности аппроксимации, что в полной мере относится и к производной $f'(t)$.

Абсолютная погрешность аппроксимации функции $\delta(t)$ и производной $\delta'(t)$ определяется соответственно выражениями:

$$\delta(t) \leqslant \left| T_{n,1}(t) - F_n(t) \right|; \quad \delta'(t) \leqslant \left| T'_{n,1}(t) - F'_n(t) \right|.$$

Для конкретного вида переходного процесса экспериментально можно найти это N и пользоваться оценками $\delta(t)$ и $\delta'(t)$.

Следует отметить, что все полученные результаты легко обобщаются для $t \in [a, b]$.

Качество математического аппарата для построения на ЭВМ динамики объекта регулирования определяется аппроксимацией производной, так как хорошее приближение функции получить значительно проще. Поэтому рассмотрим пример приближения производной переходного процесса

$$f(t) = 8e^{-t} \sin 6t$$

с помощью $B'_n(t)$, $T'_{n,1}(t)$, $F'_n(t)$. Относительная погрешность аппроксимации (в %) вычислена по формуле

$$\Delta(t) = \frac{f'(t) - A'(t)}{f'(t)} \cdot 100,$$

где $A'(t)$ — соответственно $B'_n(t)$, $T'_{n,1}(t)$, $F'_n(t)$. Результаты расчетов сведены в таблицу.

Как видно из таблицы, $T'_{n,1}(t)$, $F'_n(t)$ значительно точнее, чем $B'_n(t)$, аппроксимируют $f'(t)$. В данном случае $N \geqslant 25$, поэтому для $N = 25$ можно дать оценку абсолютной погрешности аппроксимации:

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
δ'	0,11	0,76	0,55	0,33	0,95	0,87	0,27	0,84	0,60	0,25	0,10

t, c	$f'(t)$	$\Delta(t)$, %								
		B'_{10}	$T'_{10,1}$	F'_{10}	B'_{20}	$T'_{20,1}$	F'_{20}	B'_{25}	$T'_{25,1}$	F'_{25}
0	48,00	17,00	—0,20	—1,25	6,70	—0,48	—0,23	5,08	—0,38	—0,14
0,1	31,76	33,89	11,67	—0,21	17,88	3,32	—0,05	14,45	2,35	—0,03
0,2	8,14	49,21	25,91	—8,22	29,66	8,74	—1,93	24,62	6,38	—0,42
0,3	—13,85	37,28	12,02	—0,04	19,36	3,36	—0,04	15,60	2,38	—0,01
0,4	—27,35	40,30	15,62	—0,07	22,02	4,81	—0,04	17,95	3,47	—0,01
0,5	—29,51	37,26	13,79	—0,13	20,08	4,12	—0,06	16,31	2,95	—0,02
0,6	—21,68	27,45	7,28	—0,54	13,57	1,72	—0,11	10,81	1,17	—0,07
0,7	—8,22	—10,60	—15,73	—12,55	—10,51	—6,12	68,75	—9,31	—4,55	5,58
0,8	5,47	103,78	49,06	—12,18	59,07	14,21	—1,10	48,37	10,15	—0,60
0,9	14,90	39,28	10,44	—1,22	19,38	2,39	—0,18	15,42	1,61	—0,11
1,0	17,78	6,21	—4,48	—2,34	0,97	—1,41	—0,62	0,48	—1,00	—0,44

Что касается выбора параметров n и m, то можно сказать следующее. На практике целесообразно брать $m=1$ и $n=n^*$, n^*+1, $n^*+2, \ldots$, где n^* — число заданных узлов без одного. Выбор узлов, если нет возможности варьирования их числа экспериментальным путем, следует осуществлять с помощью интерполяционных методов.

Для учета ошибок измерения и интерполяции введем параметр

$$R_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (f(t_k) - B_n(t_k))(B_{n+1}(t_k) - B_n(t_k))}{\sum\limits_{k=0}^{n} (B_{n+1}(t_k) - B_n(t_k))^2}.$$

Исследования показали, что для $R_n \geqslant n+1$ ошибки измерения и интерполяции не будут оказывать существенного влияния на точность аппроксимации $f'(t)$. При этом абсолютная погрешность приближения, начиная с некоторого N, будет находиться в указанных выше пределах. В случае $R_n < n+1$ экспериментальную информацию необходимо предварительно сгладить и только затем применять предлагаемый математический аппарат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Любомудров. Применение теории подобия при проектировании систем управления газотурбинных двигателей. М., «Машиностроение», 1971.
2. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. М.— Л., Гостехиздат, 1934.
3. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. М.— Л., Гостехиздат, 1949.

Поступило в редакцию 11 августа 1973 г.

УДК 621.391.833

В. Г. ПАРФЕНОВ

(Ленинград)

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ АМПЛИТУДНОГО МНОЖИТЕЛЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ БОЛЬШИХ ПОМЕХ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть сигнал $x(t)$ представляется в виде

$$x(t) = \mu s(t) + a \sin(\omega t + \psi) \mathrm{X}[t_1, t_2] + n(t), \; t \in [0, T], \tag{1}$$

где $s(t)$ — известный полезный сигнал; μ — неизвестный амплитудный множитель полезного сигнала;

$$\mathrm{X}[t_1, t_2] = \begin{cases} 1; & t \in [t_1, t_2]; \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T; \\ 0; & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$