ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Веселова, Ю. Н. Грибанов. О релейном методе определения коэффициента корреляции.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 2.
2. В. П. Хавкин, А. И. Гринберг. О погрешности экспериментального определения релейной корреляционной функции.— Заводская лаборатория, 1970, № 10.

Поступило в редакцию 19 ноября 1971 г.

УДК 621.391.272 : 62-504

**А. М. АЗИЗОВ, В. А. ИВАНОВ,
В. И. ЛОПУХОВ, А. С. ПОВАРЕНКОВ**

(Ленинград)

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Исследование вероятностных свойств измерительных систем с переменными параметрами имеет большое значение для техники точных измерений. В работе рассматривается задача в наиболее общей постановке применительно к измерительным системам первого порядка. Примерами последних служат различные типы термоприемников, измерительные усилители и др. преобразующие устройства, установки для точной градуировки тахометров, угловых акселерометров и т. п. Частные случаи излагаемых здесь результатов ранее опубликованы в [1, 2].

Пусть исследуемая система описывается уравнением

$$\frac{dU(t)}{dt}+\varphi(t)U(t)=f(t);\ U(0)=0, \tag{1}$$

где функции $f(t)$ (измеряемый процесс) и $\varphi(t)$ (параметр измерительной системы) являются стационарными случайными функциями времени t с известными математическими ожиданиями соответственно m_f, m_φ и корреляционными функциями $K_f(\tau)$, $K_\varphi(\tau)$, а функция $U(t)$ соответствует показаниям измерительной системы. В соответствии с общей постановкой задачи считаем, что функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ коррелированы, причем их взаимная корреляционная функция $K_{f\varphi}(t)$ также известна.

Решение уравнения (1) с нулевым начальным условием можно записать в виде

$$U(t)=\int_0^t f(t_1)\exp\left[-\int_{t_1}^t \varphi(t_2)\,dt_2\right]dt_1. \tag{2}$$

Введя обозначение

$$\int_{t_1}^t \varphi(t_2)\,dt_2=\eta(t_1),$$

математическое ожидание функции $U(t)$ можно представить в виде

$$M\left[U(t)\right]=\overline{U(t)}=\int_0^t M\{f(t_1)\exp[-\eta(t_1)]\}\,dt_1. \tag{3}$$

Здесь M — символ операции математического ожидания. Введем в рассмотрение характеристическую функцию $q(\lambda_1, \lambda_2)$ двумерного случайного вектора с компонентами $f(t_1)$ и $\eta(t_1)$. Тогда выражение для математического ожидания примет вид

$$M[U(t)]=+\frac{1}{i}\int_0^t \frac{\partial q(\lambda_1\lambda_2)}{\partial\lambda_1}\Big|_{\substack{\lambda_1=0\\ \lambda_2=i}}dt_1, \tag{4}$$

где i — мнимая единица.

В дальнейшем положим, что функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются нормально распределенными случайными функциями. Так как характеристическая функция системы нормальных случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$ однозначно выражается через элементы корреляционной матрицы $\|K_{ij}\|$ этой системы и их математические ожидания посредством формулы [3]

$$q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\exp\left(i\sum_{j=1}^n \lambda_j m_{yj}-\frac{1}{2}\sum_{j=i=1}^n K_{ji}\lambda_j\lambda_i\right), \tag{5}$$

$$m_f = M[f(t_1)]; \quad m_\eta = M[\eta(t_1)] = M[\varphi(t_2)](t - t_1).$$

Входящие в выражение (6) элементы корреляционной матрицы имеют вид:

$$K_{f\eta} = M\{[f(t_1) - \overline{f(t_1)}][\eta(t_1) - \overline{\eta(t_1)}\} =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t} [\overline{\varphi(t_2)}\, f(t_1) + K_{f\varphi}(t_2 - t_1)]\, dt_2 - \overline{f(t_1)}\,\overline{\eta(t_1)};$$

$$K_{\eta\eta} = \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{t_1}^{t} K_\varphi(t_2 - t_2')\, dt_2 dt_2'.$$

Теперь найдем корреляционную функцию для $U(t)$. Имеем

$$K_U(t_1, t_2) = M\{[U(t_1) - \overline{U(t_1)}][U(t_2) - \overline{U(t_2)}\} =$$

$$= \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} M\{\exp[-\eta(t_1')] - f(t_1')\exp[-\eta(t_2') f(t_2')]\}\, dt_1' dt_2' - \overline{U(t_1)}\,\overline{U(t_2)}. \qquad (7)$$

Введем в рассмотрение характеристическую функцию $q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ четырехмерного случайного вектора с компонентами $\eta(t_1')$, $f(t_1')$, $\eta(t_2')$, $f(t_2')$. При этом выражение для корреляционной функции преобразуется в следующее:

$$K_U(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} [K_{24} + (m_f - K_{12} - K_{23})(m_f - K_{14} - K_{34})] \times$$

$$\times \exp\left\{-(m_{\eta(t_1')} + m_{\eta(t_2')}) + \frac{1}{2}(K_{11} + K_{33} + 2K_{13})\right\} dt_1' dt_2' - \overline{U(t_1)}\,\overline{U(t_2)}. \qquad (8)$$

Элементы корреляционной матрицы, входящие в выражение (8), имеют вид:

$$K_{24} = M\{[f(t_1') - \overline{f(t_1')}]\,[f(t_2') - \overline{f(t_2')}]\} = K_f(t_2' - t_1');$$

$$K_{12} = M\{[\eta(t_1') - \overline{\eta(t_1')}]\,[f(t_1') - f(t_1')]\} = \int\limits_{t_1'}^{t} K_{f\varphi}(t_2 - t_1')\, dt_2;$$

$$K_{23} = M\{[f(t_1') - \overline{f(t_1')}]\,[\eta(t_2') - \eta(t_2')]\} = \int\limits_{t_2'}^{t} K_{f\varphi}(t_2 - t_1')\, dt_2;$$

$$K_{14} = M\{[\eta(t_1') - \overline{\eta(t_1')}]\,[f(t_2') - f(t_2')]\} = \int\limits_{t_1'}^{t} K_{f\varphi}(t_2 - t_2')\, dt_2;$$

$$K_{34} = M\{[\eta(t_2') - \overline{\eta(t_2')}]\,[f(t_2') - \overline{f(t_2')}]\} = \int\limits_{t_2'}^{t} K_{f\varphi}(t_2 - t_2')\, dt_2;$$

$$K_{11} = \int\limits_{t_1'}^{t}\int\limits_{t_1'}^{t} K_\varphi(t_2' - t_2)\, dt_2 dt_2'; \quad K_{33} = \int\limits_{t_2'}^{t}\int\limits_{t_2'}^{t} K_\varphi(t_2'' - t_2)\, dt_2 dt_2'';$$

$$K_{13} = M\{[\eta(t_1') - \overline{\eta(t_1')}]\,[\eta(t_2') - \overline{\eta(t_2')}]\} = \int\limits_{t_1'}^{t}\int\limits_{t_2'}^{t} K_\varphi(t_2'' - t_2)\, dt_2 dt_2''.$$

Если случайные функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ не коррелированы, то формулы для математического ожидания функции $U(t)$ и ее корреляционной функции существенно упрощаются:

$$M[U(t)] = m_f \int\limits_0^{t} \exp\left(-m_\eta + \frac{1}{2} K_{\eta\eta}\right) dt_1; \qquad (6')$$

$$K_U(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \left[-K_{24} - m_f^2\right] \exp\{-[m_{\eta(t_1')} + m_{\eta(t_2')}] + $$
$$+ \frac{1}{2}[K_{11} + K_{33} + 2K_{13}]\}\, dt_1'\, d_2' - \overline{U(t_1)}\,\overline{U(t_2)}. \qquad (8')$$

Если случайные функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ имели бы закон распределения, отличный от нормального, то для получения соответствующих формул достаточно было бы воспользоваться разложением заданного закона распределения в ряд Эджворта [4].

Полагая в исходном уравнении

$$\varphi(t) = i\alpha[1+\psi(t)],\; f(t) = v_1(t) + iw_1(t),$$

где $\psi(t)$, $v_1(t)$, $w_1(t)$ — нормально распределенные стационарные случайные функции, а α — число, получим результаты, изложенные в [1]. Результаты [2] вытекают из приводимых здесь, если положить

$$f(t) = \varphi(t)\theta(t),$$

где $\theta(t)$ — нормально распределенная стационарная случайная функция.

Выведенные формулы (6) и (8) являются основой вероятностного анализа любых линейных измерительных систем первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Свешников. О движении гироскопического маятника при случайных перемещениях его точки подвеса.— Прикладная математика и механика, 1962, т. XXVI, вып. 3.
2. А. М. Азизов, В. А. Иванов. О погрешностях определения характеристик случайных процессов с помощью измерительных преобразователей со случайно меняющимися параметрами.— V Всесоюзный симпозиум «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Вильнюс, 1972.
3. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
4. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.

Поступило в редакцию 19 марта 1973 г.

УДК 629.7.036 : 519.27

В. В. ТИХОМИРОВ, М. Н. ХАЛИТОВ

(Рыбинск)

О ПРИМЕНЕНИИ ПОЛИНОМОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА В ЗАДАЧАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ

При получении динамической характеристики газотурбинного двигателя как объекта регулирования необходимо по осциллограммам переходных процессов разгона и дросселлирования двигателя $f(t)$ получить производную переходного процесса $f'(t)$ [1]. Переходный процесс $f(t)$ регистрируется в n^*+1 точках с равномерным шагом по времени t. Для автоматизации построения динамики объекта регулирования на ЭВМ необходим такой математический аппарат, который позволил бы получить аналитическое выражение как для переходного процесса $f(t)$, так и для его производной $f'(t)$. Одним из аппаратов, обеспечивающих решение поставленной задачи, являются полиномы С. Н. Бернштейна

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k},$$

где $t \in [0, 1]$, $f\left(\frac{k}{n}\right)$ — значения функции в узлах $t_k = k/n$, которые обладают тем замечательным свойством, что при равномерном стремлении $B_n(t)$ к $f(t)$ производная $B_n'(t)$ равномерно стремится к $f'(t)$ [2]. Однако полиномы С. Н. Бернштейна требуют для получения удовлетворительной точности аппроксимации больших значений n. Кроме того, у этого аппарата нет оценки погрешности аппроксимации.

В данной работе на базе полиномов С. Н. Бернштейна построены полиномы

$$T_{n,m}(t) = \frac{n}{m}[B_{n+m}(t) - B_n(t)] + B_n(t),$$

$$P_{n,m}(t) = T_{n,m}(t) - B_n(t) + B_{n+m}(t),$$