УДК 681.142.5

А. И. ГРИНБЕРГ, В. П. ХАВКИН
(*Москва*)

ОБ ОЦЕНКЕ РЕЛЕЙНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПРИ НЕТОЧНОМ ЦЕНТРИРОВАНИИ РЕАЛИЗАЦИЙ

В [1] рассмотрены оценки релейной корреляционной функции (РКФ), когда реализации центрированы, т. е. математические ожидания известны априори, а соседние корреляционные произведения не коррелированы (некоррелированная выборка). Однако большой практический интерес представляет задача исследования погрешности оценки РКФ в случае коррелированной или неточно центрированной выборки. Решение первой задачи дано в [2]; ниже определяется соответствующая погрешность для неточно центрированной некоррелированной выборки, когда оценка РКФ есть

$$K^{*}_{XY}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right)\operatorname{sign}\left(y_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}y_j\right). \tag{1}$$

Здесь x_i, y_i — i-е отсчеты соответственно случайных функций $x(t)$ и $y(t)$, т. е. $x_i=x(t_i)$, $y_i=y(t_i+\tau)$; математические ожидания в (1) оцениваются как

$$M^{*}_{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i;\qquad M^{*}_{Y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i.$$

Можно показать, что оценка (1) смещенная, так что

$$M\left[K^{*}_{XY}(\tau)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma_{11}\rho_{12}(\tau)\sqrt{\frac{N-1}{N}}, \tag{2}$$

где

$$\rho_{12}(\tau)=\frac{R_{XY}(\tau)}{\sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}};\quad \sigma^2_{11}=R_{XX}(0).$$

Используя (2) для дисперсии оценки (1), получаем

$$D\left[K^{*}_{XY}(\tau)\right]=M\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right)\operatorname{sign}\left(y_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}y_j\right)\right]^2\right\}-$$
$$-\frac{2}{\pi}\sigma^2_{11}\rho^2_{12}(\tau)\frac{N-1}{N}. \tag{3}$$

Рассмотрим математическое ожидание в левой части (3). Имеем

$$M_1=M\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right)\operatorname{sign}\left(y_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}y_j\right)\right]^2\right\}=$$
$$=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}M\left[\left(x_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right)^2\right]+\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i,\,k=1\\ i\neq k}}^{N}M\left[x_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right)\times$$
$$\times\left(x_k-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right)\operatorname{sign}\left(y_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}y_j\right)\operatorname{sign}\left(y_k-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}y_j\right)\Bigg]. \tag{4}$$

Для неточно центрированной выборки, даже если она некоррелированная, корреляционные произведения оказываются коррелированными, что вызывает появление второго члена в правой части (4). Обозначим

$$h_{1i}=x_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j;\quad h_{2i}=y_i-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}y_j.$$

Тогда

$$M_1=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}M\left[h^2_{1i}\right]+\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{k,\,i=1,\\ i\neq k}}^{N}M\left[h_{1k}h_{1i}\operatorname{sign}h_{2k}\operatorname{sign}_{2i}\right].$$

Можно показать, что

$$M\left[h_{1i}\right]=M\left[h_{2i}\right]=0;$$
$$M\left[h^2_{1i}\right]=D\left[h_{1i}\right]=\frac{N-1}{N}\sigma^2_{11};\qquad D\left[h_{2i}\right]=\frac{N-1}{N}\sigma^2_{22}; \tag{5}$$

$$M[h_{1i}h_{2k}] = R_{1i,\,2k} = R_{2k,\,1i} = -\frac{1}{N}R_{12}; \quad \rho_{1i,\,2k} = -\frac{\rho_{12}}{N-1};$$

$$M[h_{1i}h_{1k}] = R_{1i,\,1k} = -\frac{1}{N}\sigma_{11}^2; \quad \rho_{1i,\,1k} = -\frac{1}{N-1};$$

$$M[h_{2i}h_{2k}] = R_{2i,\,2k} = -\frac{1}{N}\sigma_{22}^2; \quad \rho_{2i,\,2k} = -\frac{1}{N-1}$$

для $i=1, 2, \ldots, N$. Поэтому

$$M_1 = \frac{N-1}{N}\sigma_{11}^2 + \frac{N-1}{N}M[h_{1i}h_{1k}\,\mathrm{sign}\,h_{2i}\,\mathrm{sign}\,h_{2k}].$$

Таким образом, задача сводится к вычислению математического ожидания

$$G = M[h_{1i}h_{1k}\,\mathrm{sign}\,h_{2i}\,\mathrm{sign}\,h_{2k}],$$

где $h_{1i}, h_{1k}, h_{2i}, h_{2k}$ — нормальные случайные величины с матрицей ковариаций вида

$$R = \begin{Vmatrix} \sigma_{11}^2\frac{N-1}{N} & -\sigma_{11}^2\frac{1}{N} & \rho_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\frac{N-1}{N} & -\rho_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\frac{1}{N} \\ -\sigma_{11}^2\frac{1}{N} & \sigma_{11}^2\frac{N-1}{N} & -\rho_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\frac{1}{N} & \rho_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\frac{N-1}{N} \\ \rho_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\frac{N-1}{N} & -\rho_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\frac{1}{N} & \sigma_{22}^2\frac{N-1}{N} & -\sigma_{22}^2\frac{1}{N} \\ -\rho_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\frac{1}{N} & \rho_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\frac{N-1}{N} & -\sigma_{22}^2\frac{1}{N} & \sigma_{22}^2\frac{N-1}{N} \end{Vmatrix} \tag{6}$$

Математическое ожидание G вычислено в [2] для произвольной матрицы R. Используя соотношения (14) — (17) работы [2] с учетом (6), будем иметь

$$M[h_{1i}h_{1k}\,\mathrm{sign}\,h_{2i}\,\mathrm{sign}\,h_{2k}] = \frac{2}{\pi}\sigma_{11}^2\left\{-\frac{(1-\rho_{12})\rho_{12}^2}{N-1}\times\right.$$
$$\times\left[-\frac{1}{N-1}\sqrt{1-\frac{1}{(N-1)^2}} - \arcsin\frac{1}{N-1}\right] + \rho_{12}^2\left[\frac{1}{N-1}\arcsin\frac{1}{N-1} + \right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{1-\frac{1}{(N-1)^2}}\right] + \frac{1-\rho_{12}^2}{N}\arcsin\frac{1}{N-1}\right\}\frac{N-1}{N}. \tag{7}$$

Для дисперсии оценки РКФ окончательно получаем

$$D[K_{XY}^*(\tau)] = \frac{N-1}{N^2}\sigma_{11}^2 + \frac{(N-1)^2}{N^2}\frac{2}{\pi}\sigma_{11}^2\left\{-\frac{(1-\rho_{12})\rho_{12}^2}{N-1}\times\right.$$
$$\times\left[-\frac{1}{N-1}\sqrt{1-\frac{1}{(N-1)^2}} - \arcsin\frac{1}{N-1}\right] + \rho_{12}^2\left[\frac{1}{N-1}\arcsin\frac{1}{N-1} + \right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{1-\frac{1}{(N-1)^2}}\right] + \frac{1-\rho_{12}^2}{N}\arcsin\frac{1}{N-1}\right\} - \frac{2}{\pi}\sigma_{11}^2\rho_{12}^2\frac{N-1}{N} \tag{8}$$

или

$$D[K_{XY}^*(\tau)] = \frac{\sigma_{11}^2}{N}\left[1-\frac{2}{\pi}\rho_{12}^2(\tau)\right] + \frac{\sigma_{11}^2}{N^2}\left[\frac{4}{\pi}(1-\rho_{12}(\tau))\rho_{12}^2(\tau) + \frac{1}{\pi}\rho_{12}^2(\tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi}(1-\rho_{12}^2(\tau)) - 1\right] + 0\left(\frac{1}{N^3}\right). \tag{9}$$

Последние выражения решают поставленную задачу. Обычно на практике $N \gg 1$ и (9) можно упростить, пренебрегая членами порядка $1/N^2$; при этом находим

$$D[K_{XY}^*(\tau)] = \frac{\sigma_{11}^2}{N}\left[1-\frac{2}{\pi}\rho_{12}^2(\tau)\right].$$

Это соотношение совпадает с результатом, полученным в [1] для случая с точным центрированием реализаций.

Таким образом, увеличение дисперсии оценки РКФ из-за неточного центрирования имеет порядок $1/N^2$, аналогично тому, как это имеет место для множительного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Веселова, Ю. Н. Грибанов. О релейном методе определения коэффициента корреляции.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 2.
2. В. П. Хавкин, А. И. Гринберг. О погрешности экспериментального определения релейной корреляционной функции.— Заводская лаборатория, 1970, № 10.

Поступило в редакцию 19 ноября 1971 г.

УДК 621.391.272 : 62-504

А. М. АЗИЗОВ, В. А. ИВАНОВ, В. И. ЛОПУХОВ, А. С. ПОВАРЕНКОВ

(Ленинград)

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Исследование вероятностных свойств измерительных систем с переменными параметрами имеет большое значение для техники точных измерений. В работе рассматривается задача в наиболее общей постановке применительно к измерительным системам первого порядка. Примерами последних служат различные типы термоприемников, измерительные усилители и др. преобразующие устройства, установки для точной градуировки тахометров, угловых акселерометров и т. п. Частные случаи излагаемых здесь результатов ранее опубликованы в [1, 2].

Пусть исследуемая система описывается уравнением

$$\frac{dU(t)}{dt}+\varphi(t)U(t)=f(t);\ U(0)=0, \tag{1}$$

где функции $f(t)$ (измеряемый процесс) и $\varphi(t)$ (параметр измерительной системы) являются стационарными случайными функциями времени t с известными математическими ожиданиями соответственно m_f, m_φ и корреляционными функциями $K_f(\tau)$, $K_\varphi(\tau)$, а функция $U(t)$ соответствует показаниям измерительной системы. В соответствии с общей постановкой задачи считаем, что функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ коррелированы, причем их взаимная корреляционная функция $K_{f\varphi}(t)$ также известна.

Решение уравнения (1) с нулевым начальным условием можно записать в виде

$$U(t)=\int_0^t f(t_1)\exp\left[-\int_{t_1}^t \varphi(t_2)\,dt_2\right]dt_1. \tag{2}$$

Введя обозначение

$$\int_{t_1}^t \varphi(t_2)\,dt_2=\eta(t_1),$$

математическое ожидание функции $U(t)$ можно представить в виде

$$M\left[U(t)\right]=\overline{U(t)}=\int_0^t M\{f(t_1)\exp[-\eta(t_1)]\}\,dt_1. \tag{3}$$

Здесь M — символ операции математического ожидания. Введем в рассмотрение характеристическую функцию $q(\lambda_1, \lambda_2)$ двумерного случайного вектора с компонентами $f(t_1)$ и $\eta(t_1)$. Тогда выражение для математического ожидания примет вид

$$M[U(t)]=+\frac{1}{i}\int_0^t \frac{\partial q(\lambda_1\lambda_2)}{\partial\lambda_1}\Big|_{\substack{\lambda_1=0\\ \lambda_2=i}}dt_1, \tag{4}$$

где i — мнимая единица.

В дальнейшем положим, что функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются нормально распределенными случайными функциями. Так как характеристическая функция системы нормальных случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$ однозначно выражается через элементы корреляционной матрицы $\|K_{ij}\|$ этой системы и их математические ожидания посредством формулы [3]

$$q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\exp\left(i\sum_{j=1}^n \lambda_j m_{yj}-\frac{1}{2}\sum_{j=i=1}^n K_{ji}\lambda_j\lambda_i\right), \tag{5}$$