УДК 681.08

Ф. М. ЗАВЬЯЛКИН, М. С. КВАСНИЦА
(*Томск*)

ВЛИЯНИЕ ФЛЮКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ НА ПОГРЕШНОСТЬ ОЦЕНКИ ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ДИСКРЕТНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается задача по определению среднего $\overline{Y(t)}$ и дисперсии σ^2 на выходе линейного фильтра при поступлении на его вход потока импульсов, образованного из пуассоновского путем модуляции его интенсивности случайной функцией времени $\nu(t)$ [1]. Будем считать, что процесс $\nu(t)$, порожденный нежелательными флюктуациями параметров среды, является стационарным гауссовым процессом с нулевым средним и известной корреляционной функцией $B(x)$.

Таким образом, наша задача заключается в обобщении при определенных условиях (указанных ниже) формул Кемпбелла [2] для вычисления дисперсии и среднего случайного процесса на выходе линейного фильтра при поступлении на его вход потока импульсов, образованного из пуассоновского путем модуляции его интенсивности λ_0 случайной функцией времени $\nu(t)$.

Для нахождения точных выражений $\overline{Y(t)}$ и σ^2 используем изложенное в [3] представление коррелированного потока импульсов в виде суперпозиции независимых потоков более простой структуры. В рассматриваемом случае поток импульсов на входе линейного фильтра при перечисленных ниже условиях можно представить в виде суммы двух независимых потоков: пуассоновского потока одиночных импульсов с интенсивностью

$$\lambda_1(t) = \lambda_0 - \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\,dx + \int_0^{t'} B(x-t)\,dx = \lambda_0 - \lambda_2 + \int_0^{t'} B(x-t)\,dx, \qquad t' \in (0, t) \tag{1}$$

и пуассоновского потока пар импульсов с интенсивностью $1/2\,\lambda_2$ и внутригрупповой плотностью

$$f(\xi/\eta) = \frac{B(\xi-\eta)}{\int_{-\infty}^{\infty} B(x)\,dx} \tag{2}$$

при выборе одного из импульсов пары за ее центр. При этом η — момент появления «центрального» импульса; ξ — момент появления «сопровождающего» импульса; $\int_0^{t'} B(x-t)\,dx$ — величина, учитывающая краевой эффект потока одиночных импульсов.

Указанное представление потока на входе линейного фильтра возможно при выполнении следующих условий:

$$B(x) \geqslant 0; \tag{3}$$

$$\lambda_0 - \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\,dx \geqslant 0. \tag{4}$$

Данные ограничения уменьшают область применения приводимых ниже результатов. Однако нахождение точных выражений для вычисления $\overline{Y(t)}$ и σ^2 при более слабых ограничениях затруднительно.

Используя независимость потоков одиночных импульсов и пар, можно записать:

$$\overline{Y(t)} = \overline{Y_1(t)} + \overline{Y_2(t)}; \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

где $\overline{Y_1(t)}$, $\overline{Y_2(t)}$ и σ_1^2, σ_2^2 — средние и дисперсии случайных процессов на выходе линейного фильтра, обусловленных потоками одиночных импульсов и пар импульсов соответственно.

Выражения для определения $\overline{Y_1(t)}$ и σ_1^2 известны [2]:

$$\overline{Y_1(t)} = \left(\lambda_0 - \frac{1}{2}\lambda_2\right)\int_0^{\infty} h(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} B(t'-x)\,h(x)\,dt'dx;$$

$$\sigma_1^2 = \left(\lambda_0 - \frac{1}{2}\lambda_2\right)\int_0^{\infty} h^2(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} B(t'-x)\,h^2(x)\,dt'dx.$$

Для нахождения $\overline{Y_2(t)}$ и σ_2^2 рассмотрим случайную величину Y_t, образованную действием пары импульсов на вход фильтра и равную

$$Y_t = h(t-\eta) + h(t-\xi)\,1\,(t-\xi), \tag{5}$$

где $h(x)$ — отлик фильтра на одиночный импульс, а $1\ (t)$ — функция Хевисайда

$$1\,(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

позволяет учитывать краевой эффект потока пар.

При фиксированном числе n пар импульсов и произвольном интервале $(0,\ t)$ случайные величины $Y_t(i)$ и $Y_t(k),\ i \neq k,\ i=0,1,\ldots,\ n,\ k=0,\ 1,\ldots,\ n$ независимы и одинаково распределены. Тогда если $\psi_t(\omega)$ — характеристическая функция случайной величины $Y_t(i)$, а $\varphi_t(\omega)$ — характеристическая функция случайного процесса $Y_2(t)$, то

$$\varphi_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} [\psi_t(\omega)]^n \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_2 t\right) \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda_2 t\right)^n}{n!} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_2 t\,[1-\psi_t(\omega)]\right\} \tag{5'}$$

или

$$\overline{Y_2(t)} = \frac{1}{2}\lambda_2 t \overline{Y}_t; \tag{6}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2}\lambda_2 t \overline{Y_t^2}. \tag{7}$$

Учитывая, что η — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0,\ t)$, $d\xi$ — случайная величина с функцией плотности вероятности (2). из (6) и (7) при $t \to \infty$

$$\overline{Y_2(t)} = \frac{1}{2}\lambda_2 \int_0^{\infty} h(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} B(\theta-\tau)\,h(\theta)\,d\tau d\theta;$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2}\lambda_2 \int_0^{\infty} h^2(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} B(\theta-\tau)\,h^2(\tau)\,d\tau d\theta + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} B(\theta-\tau)\,h(\tau)\,h(\theta)\,d\tau d\theta,$$

где $\tau = t-\eta$; $\theta = t-\xi$. Окончательно получим:

$$\overline{Y(t)} = \lambda_0 \int_0^{\infty} h(\tau)\,d\tau; \tag{8}$$

$$\sigma^2 = \lambda_0 \int_0^{\infty} h^2(\tau)\,d\tau + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} B(\theta-\tau)\,h(\theta)\,h(\tau)\,d\theta d\tau. \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) при флюктуациях параметров среды, удовлетворяющих условиям (3) и (4), являются не допускающими уточнений формулами для расчета погрешности оценки характеристики среды при измерениях с использованием радиоактивных изотопов.

Из выражения (8) следует, что стационарные флюктуации параметров среды не влияют на смещенность оценки ее характеристики.

Исследуем зависимость σ^2 от соотношения полосы пропускания W фильтра и величины обратной интервалу корреляции Δ процесса $\nu(t)$.

1. Пусть $W \ll \frac{1}{\Delta}$. Тогда выражения (1) и (5) можно записать:

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\,dx;$$

$$h(t-\eta) + h(t-\xi)\,1\,(t-\xi) \simeq h(t-\eta) + h(t-\xi).$$

Фильтр не чувствителен к краевым эффектам потоков пар и одиночных импульсов. Из выражений (6) и (7) получим

$$\sigma^2 = \lambda_0 \int_0^{\infty} h^2(\tau)\,d\tau + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} B(\theta-\tau)\,h(\theta)\,h(\tau)\,d\tau d\theta.$$

2. Пусть $W \gg \frac{1}{\Delta}$. Тогда выражения (1) и (5) примут вид:

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} B(x)\,dx;$$

$$h(t-\eta) + h(t-\xi)\,1\,(t-\xi) \simeq h(t-\eta).$$

Из выражений (6) и (7) найдем

$$\sigma^2 = \lambda_0 \int\limits_0^\infty h^2(\tau)\, d\tau.$$

Это означает, что в рассматриваемом случае в общей погрешности преобладает погрешность, обусловленная статистической природой источника излучения (с учетом ограничения (4)).

Аналогично [2] формулы (8), (9) можно обобщить на случай независимых флюктуаций амплитуд импульсов на входе фильтра. Используя выражения (2), (5), (5′), сравнительно легко можно найти центральные моменты любого порядка процесса $Y(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Таточенко. Радиоактивные изотопы в приборостроении. М., Атомиздат, 1960.
2. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.
3. И. А. Большаков. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. М., «Советское радио», 1968.

Поступило в редакцию 16 апреля 1973 г.

УДК 538.56

В. А. ГЕРАНИН, А. К. ЕГОРОВ, И. И. КОЗЛОВ

(*Киев*)

ТОЧНОСТЬ КОРРЕЛОМЕТРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

Результаты измерений вероятностных характеристик случайных процессов нередко искажены помехами. При этом существенны закон распределения помехи и характер воздействия последней на анализируемый процесс.

Исследуем влияние на точность измерения корреляционной функции нестационарного случайного процесса (НСП) $S(t)$ гауссовой помехи $N(t)$.

Рассмотрим случаи аддитивной и мультипликативной помех.

В качестве модели НСП примем эргодический (по отношению к корреляционной функции) случайный процесс

$$S(t) = \varphi(t) Z(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — детерминированный процесс; $Z(t)$ — стационарный гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием. Полагаем, что экспериментатор располагает единственной реализацией $S(t)$. В качестве оценки $\widetilde{R}_S(t_0, \tau)$ корреляционной функции $R_S(t_0, \tau)$ НСП $S(t)$ примем случайную функцию

$$\widetilde{R}_S(t_0, \tau) = \int\limits_{t_0-T}^{t_0} X(t) X(t-\tau) h(t_0-t)\, dt = \int\limits_0^T X(t_0-t) X(t_0-t-\tau) h(t)\, dt, \tag{2}$$

где $h(t)$ — весовая функция фильтра, сглаживающего корреляционное произведение; $X(t)$ — результат воздействия помехи $N(t)$ на исследуемый НСП.

Аддитивная помеха. В этом случае

$$X(t) = S(t) + N(t); \tag{3}$$

$$\widetilde{R}_S(t_0, \tau) = \int\limits_0^T h(t) [S(t_0-t) + N(t_0-t)] [S(t_0-t-\tau) + N(t_0-t-\tau)]\, dt. \tag{4}$$

В качестве критерия точности оценки (4) воспользуемся полной погрешностью измерения

$$\varepsilon \left[\widetilde{R}_S(t_0, \tau)\right] = \left\{\Delta^2 \left[\widetilde{R}_S(t_0, \tau)\right] + \sigma^2 \left[\widetilde{R}_S(t_0, \tau)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где $\Delta[\widetilde{R}_S(t_0, \tau)$ и $\sigma^2[\widetilde{R}_S(t_0, \tau)]$ — смещение и дисперсия оценки $\widetilde{R}_S(t_0, \tau)$.

На рис. 1—3 представлены графики $\varepsilon[\widetilde{R}_S(t_0, \tau)]$, полученные на ЦВМ для взаимно-некоррелированных $S(t)$ и $N(t)$ при $\langle N(t)\rangle = 0$:

$$h(t) = \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right); \tag{6}$$