

М. Ш. РОЗЕНБЛАТ, Б. И. ШВЕЦКИЙ

(Львов)

ПОГРЕШНОСТЬ СМЕЩЕНИЯ ЦИФРОВЫХ СПЕКТРОАНАЛИЗАТОРОВ

В цифровых спектроанализаторах спектральная плотность стационарного эргодического случайного процесса определяется путем усреднения текущих оценок, вычисленных по конечным выборкам $X(t)$ длительностью T . Из-за ограниченности во времени выборки математическое ожидание текущих оценок $F(\omega)$ оказывается смещенным. Погрешность смещения $\rho(\omega) = (S(\omega) - F(\omega))/S(\omega)$ зависит от длительности выборки T , формы частотной характеристики спектроанализатора и истинной спектральной плотности $S(\omega)$.

Смещенность оценки $F(\omega)$ обычно устраняется путем увеличения длительности T . Однако при ограниченном объеме памяти анализатора увеличение T приводит к сужению частотного диапазона и одновременно к увеличению времени анализа. Кроме того, при исследовании некоторых нестационарных процессов такой способ повышения достоверности анализа не только не желателен, а порой и недопустим.

В дальнейшем описывается простой алгоритм коррекции $F(\omega)$, позволяющий за счет незначительного увеличения времени анализа получать практически несмещенные оценки для гладких участков $S(\omega)$ и улучшающий оценку в окрестности пиков. Наблюдающийся при этом рост дисперсии оценки может быть сведен к приемлемой величине усреднением по ансамблю. Предлагаемый алгоритм коррекции представляет собой некоторое линейное преобразование $F(\omega)$ и достаточно просто реализуется в цифровом спектроанализаторе.

Определение погрешности смещения $\rho(\omega)$. В спектроанализаторах, получивших распространение, частотная характеристика $K(\omega)$ формируется путем умножения исследуемой реализации на весовую функцию $h(t)$. В этом случае, как показано в приложении 1, $K(\omega) = H^2(\omega)$ и погрешность смещения равна

$$\rho(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega - \gamma) - S(\omega)}{S(\omega)} H^2(\gamma) d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} H^2(\gamma) d\gamma} \quad (1)$$

Пусть $S(\omega)$ — полином степени n . Тогда, учитывая четность $H^2(\omega)$, выражение (1) представляется в виде

$$\rho(\omega) = \frac{S^{II}(\omega)}{2S(\omega)} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 H^2(\gamma) d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} H^2(\gamma) d\gamma} + \frac{S^{IV}(\omega)}{24S(\omega)} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^4 H^2(\gamma) d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} H^2(\gamma) d\gamma} + \dots, \quad (2)$$

где $S^{II}(\omega)$ и $S^{IV}(\omega)$ — соответственно вторая и четвертая производные $S(\omega)$. Из формулы (2) следует, что погрешность смещения $\rho(\omega)$ является дробно-рациональной функцией, числитель которой в силу

$$M_{2m} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{2m} H^2(\gamma) d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} H^2(\gamma) d\gamma} > 0$$

не равен нулю на всей частотной оси, за исключением, может быть, K точек ω (K — степень числителя; $K \leq n-2$). В приложении 2 показано, что в классе частотных характеристик $K(\omega) = H^2(\omega)$ имеем $M_2 \geq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ и $M_4 \geq \left(\frac{3\pi}{T}\right)^4$.

Нетрудно доказать, что для любого нормированного момента $H^2(\omega)$ справедливо соотношение $M_{2m} = \left(\frac{\alpha_{2m}}{T}\right)^{2m}$, причем коэффициенты α_{2m} возрастают с увеличением m . Таким образом, спектроанализатор, частотная характеристика которого принадлежит классу $K(\omega) = H^2(\omega)$, дает смещенную оценку $F(\omega)$; погрешность смещения $\rho(\omega)$ в общем случае ($S''(\omega) \neq 0$) обратно пропорциональна T^2 , зависит от четных производных $S(\omega)$ и ограниченных снизу четных моментов $H^2(\omega)$ и в ряде практических задач оказывается недопустимо большой.

Коррекция оценки $F(\omega)$. Необходимым условием несмещенности оценки спектральной плотности является знакопеременность $K(\omega)$. Сформировать знакопеременную $K(\omega)$ можно путем некоторого линейного преобразования (коррекции) оценки $F(\omega)$. Коррекцию можно осуществить двумя способами.

1. Вычислить обратное преобразование Фурье оценки $F(\omega)$ ($R_1(t)$), умножить $R_1(t)$ на подходящую корректирующую функцию $z(t)$; преобразование Фурье произведения $R_1(t)z(t)$ дает откорректированную оценку $F_1(\omega)$.

2. Вычислить свертку вида

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) z(\omega - \alpha) d\alpha, \quad (3)$$

где

$$z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Очевидно, оценка $F_1(\omega)$ связана с истинной спектральной плотностью $S(\omega)$ соотношением

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \gamma) K(\gamma) d\gamma,$$

где

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H^2(\omega - \gamma) z(\gamma) d\gamma -$$

скорректированная частотная характеристика спектроанализатора.

Коррекция оценки $F(\omega)$ значительно упрощается, если корректирующая функция $z(t)$ представляется рядом Фурье на интервале $[-T, T]$

$$z(t) = \sum_{i=0}^l a_i \cos \frac{i\pi t}{T}. \quad (4)$$

Тогда $z(\omega) = \sum_{i=0}^l \frac{a_i}{2} \left[\delta\left(\omega - \frac{i\pi}{T}\right) + \delta\left(\omega + \frac{i\pi}{T}\right) \right]$ и свертка (3) приобретает простой вид

$$F_1(\omega) = \sum_{i=0}^l \frac{a_i}{2} \left[F\left(\omega - \frac{i\pi}{T}\right) + F\left(\omega + \frac{i\pi}{T}\right) \right]. \quad (5)$$

Оценка $F_1(\omega)$ является несмещенной, если $M_{2i} = 0$ ($i = 1, \frac{n}{2}; n$ — степень полинома $S(\omega)$). Если функция $r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega t} dt = z(t) H(t)$ имеет

непрерывную производную порядка $2i$, то справедливо равенство $M_{2i} = (-1)^i r^{(2i)}(0)$, где $r^{(2i)}(t)$ — производная порядка $2i$ от функции $r(t)$.

Предположим, что производные свертки $[h(t)*h(t)] = H(t)$ имеют особенности только в нуле и на краях интервала $[-T, T]$. Тогда дифференцируемость $2i$ раз на краях интервала функции $r(t)$ обеспечивается, если выполняется условие $r^{(2i)}(T) = 0$.

Таким образом, несмещенность оценки $F_1(\omega)$ обеспечивается, если коэффициенты a_i в формуле (4) удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} r^{(2i)}(0) = 0; \\ r^{(2i)}(T) = 0; \\ r(0) = 1. \end{cases} \quad i = \overline{1, \frac{n}{2}}; \quad (6)$$

Система (6) упрощается, если весовая функция $h(t)$ дифференцируема $n/2$ раз. Действительно, в этом случае свертка $[h(t)*h(t)]$ и, следовательно, $r(t)$ дифференцируемы n раз, и система (6) принимает вид

$$\begin{cases} r(0) = 1; \\ r^{(2i)}(0) = 0; \end{cases} \quad i = \overline{1, \frac{n}{2}}. \quad (7)$$

Отметим, что корректирующая функция $z(t)$ при этом имеет наиболее простой вид, так как количество коэффициентов a_i в формуле (4) минимально и равно $\frac{n}{2} + 1$.

Если производные весовой функции $h(t)$ имеют особенности в нуле, то требование дифференцируемости $n/2$ раз выполняется, если $h(t)$ удовлетворяет системе

$$\left. \frac{d^i h(t)}{dt^i} \right|_{t=\frac{T}{2}} = 0; \quad i = \overline{1, \frac{n}{2}}. \quad (8)$$

Таким образом, если весовая функция $h(t)$ удовлетворяет системе (8), тогда из системы (7) может быть определена корректирующая функция $z(t)$; оценка $F_1(\omega)$ полиномиальной спектральной плотности является несмещенной.

Практическое использование полученных результатов. 1. Рассмотренная процедура коррекции в случае полиномиальных спектральных плотностей $S(\omega)$ позволяет получать практически несмещенные оценки. Скорректированная частотная характеристика $K(\omega)$ обладает следующими свойствами: 1) первые $n/2$ моментов равны нулю ($n/2 \geq 1$); 2) скорость затухания боковых лепестков не меньше ω^{n+2} .

Из свойств $K(\omega)$ следует, что погрешность смещения $\rho(\omega)$ пропорциональна $1/T^{n+2}$. Это, в свою очередь, означает, что при коррекции удаётся значительно эффективнее использовать возможность уменьшения $\rho(\omega)$ за счет увеличения длительности T . Кроме того, скорость затухания боковых лепестков сравнительно велика уже при небольших n , так что $K(\omega)$ можно считать определенной на конечном интервале $[-\Delta\omega, \Delta\omega]$. Величину $\Delta\omega$ приближенно можно определить, например, пользуясь не-

равенством $\int_{\Delta\omega}^{\infty} |K(\gamma)| d\gamma < \varepsilon$, где ε — некоторая допустимая погрешность замены $K(\omega)$ финитной функцией, либо воспользовавшись формулой (1).

Теперь предложенный алгоритм коррекции применим для более широкого класса процессов, спектральная плотность которых является полиномом на конечном интервале $[-\Delta\omega, \Delta\omega]$.

2. Коррекция оценки $F(\omega)$ при небольших n достаточно просто реализуется в цифровых спектроанализаторах; вычисления по формуле (5) требуют меньше машинных операций, чем способом 1. Время вычислений по формуле (5) значительно меньше времени, необходимого на вычисление $F(\omega)$. Поэтому в ряде практических задач можно точнее изучить

структуру исследуемого процесса, получая несколько оценок $F_1(\omega)$ при различных n .

3. В качестве весовых функций $h(t)$ можно рекомендовать, например,

$$h(t) = 1 + \cos\left(\pi \sin \frac{\pi}{2} \dots \sin \frac{\pi t}{T}\right). \quad (9)$$

Эти весовые функции [1] прежде всего достаточно просто вычисляются в цифровых спектроанализаторах, требуя в основном $(p+1)$ обращений к таблице $\langle \sin \rangle$ (p — количество $\langle \sin \rangle$ в записи формулы). Важным свойством функций (9) является наличие непрерывной производной 2^{p+1} -го порядка, что делает их перспективными, особенно тогда, когда требуется высокий порядок непрерывной производной $h(t)$.

4. Скорректированная частотная характеристика $K(\omega)$ иногда имеет большой уровень боковых лепестков, что приводит к искажениям оценки $F_1(\omega)$ в окрестности узких пиков $S(\omega)$. Для получения удовлетворительной оценки в окрестности пиков $S(\omega)$ обычно требуется такая частотная характеристика, у которой при заданном уровне γ боковых лепестков ширина $\Delta\omega_\gamma$ основного лепестка минимальна [1].

Таким образом, в универсальном цифровом спектроанализаторе наряду с возможностью получения скорректированной частотной характеристики должна быть предусмотрена возможность получения $K(\omega)$, удовлетворяющей критерию минимального значения

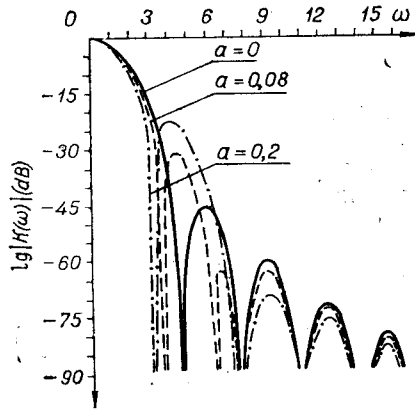


Рис. 1.

$\Delta\omega_\gamma T$. Этот критерий можно приближенно удовлетворить путем надлежащего выбора коэффициентов a_i .

В качестве примера на рис. 1 приведено семейство частотных характеристик $K(\omega, a) = \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^2 \cos^2 \omega \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\pi^2}{4} - \omega^2\right)^2} - \frac{a}{2 \left[\frac{\pi^2}{4} - (\omega - \pi)^2\right]} - \frac{a}{2 \left[\frac{\pi^2}{4} - (\omega + \pi)^2\right]} \right\}$, полученное при $z(t) = 1 - a \cos \frac{2\pi t}{T}$ и $h(t) = \frac{\pi}{2T} \cos \frac{\pi t}{T}$.

Приложение 1

Определение погрешности смещения $\rho(\omega)$. Определим весовую функцию $h_T(t)$ следующей формулой:

$$h_T(t) = \begin{cases} h(t); & |t| \leq \frac{T}{2}; \\ 0; & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Тогда текущий спектр выборки $X(t)$ с точностью до постоянной равен

$$x_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t) X(t) e^{-j\omega t} dt.$$

и текущие оценки спектральной плотности $S(\omega)$ вычисляются по формуле

$$X_T(j\omega) X_T^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t_1) X(t_2) e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t_1) h_T(t_2) dt_2.$$

Математическое ожидание текущих оценок после замены переменных $t_1 - t_2 = \tau$ выражается следующим образом:

$$\overline{X_T(j\omega) X_T^*(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} H(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \gamma) H^2(\gamma) d\gamma,$$

где $R(\tau) = \overline{X(t_1)X(t_2)}$ — корреляционная функция стационарного эргодического процесса;

$$H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t_2 + \tau) h_T(t_2) dt_2; \quad H(\tau) = 0 \text{ при } |\tau| > T; \quad H^2(\omega) = h(\omega) h^*(\omega),$$

где $h(\omega)$ — преобразование Фурье $h(t)$.

Если спектроанализатор калиброван по равномерному «белому» шуму, тогда

$$F(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \gamma) H^2(\gamma) d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} H^2(\gamma) d\gamma}$$

и погрешность смещения равна

$$\rho(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega - \gamma) - S(\omega)}{S(\omega)} H^2(\gamma) d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} H^2(\gamma) d\gamma}.$$

Приложение 2

Определение весовой функции с минимальной величиной второго момента $H^2(\omega)$. Пользуясь формулой Релея, нормированный второй момент $H^2(\omega)$ можно записать в виде

$$M_2 = \frac{\int [h'(t)]^2 dt}{\int h^2(t) dt},$$

где $h'(t)$ — производная весовой функции $h(t)$. (В этом приложении для простоты не указывается отрезок интегрирования, который равен $(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2})$). Вариация функционала $M_2 \delta M_2$ равна

$$\delta M_2 = \frac{\int 2h'(t) \delta h' dt}{\int h^2(t) dt} - \frac{\int [h'(t)]^2 dt \int 2h(t) \delta h dt}{[\int h^2(t) dt]^2} = \frac{-2 \int [h''(t) + M_2 h(t)] \delta h dt}{\int h^2(t) dt}.$$

Так как функционал M_2 не зависит от масштаба весовой функции $h(t)$, то для определенности решения примем $\int h(t) dt = 1$. Приравняв вариацию δM_2 нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} h''(t) + M_2 h(t) = 0; \\ \int h(t) dt = 1, \end{cases}$$

решением которой при граничных условиях $h(\pm T/2) = 0$ является весовая функция $h(t) = \frac{\pi}{2T} \cos \frac{\pi t}{T}$.

Минимальное значение $M_{2\min}$ равно $(\pi/T)^2$. Отметим, что весовая функция с минимальной величиной второго момента $H^2(\omega)$ совпадает с известным окном Бернштейна — Рогозинского, рекомендованным в [2] для центрирования случайных процессов.

Определение весовой функции с минимальной величиной четвертого момента $H^2(\omega)$. Аналогично, воспользовавшись формулой Релея, находим

$$M_4 = \frac{\int [h''(t)]^2 dt}{\int h^2(t) dt}.$$

Приравняв первую вариацию δM_4 нулю, получаем дифференциальное уравнение

$$h^{VI}(t) - M_4 h(t) = 0,$$

решением которого с учетом граничных условий $h(\pm \frac{T}{2}) = h'(\pm \frac{T}{2}) = 0$ и $\int h(t) dt = 1$ является весовая функция

$$h(t) = \frac{a}{4} \left(\frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{sh} \frac{aT}{2}} + \frac{\cos at}{\sin \frac{aT}{2}} \right),$$

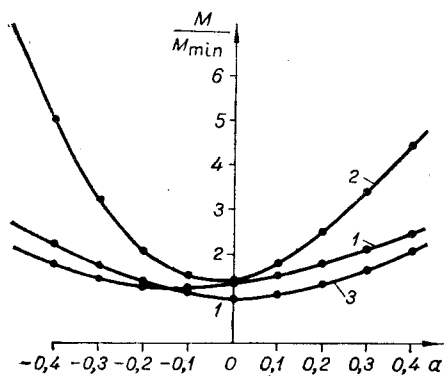


Рис. 2.

для $h(t) = \cos \frac{\pi t}{T} + a \cos \frac{3\pi t}{T}$ (кривая 3), рекомендованных в [3] для интерполяции и аподизации спектрограмм, приведены на рис. 2.

где $a = \sqrt[4]{M_{4\min}}$ — наименьший по абсолютной величине ненулевой корень уравнения $\text{th} \frac{aT}{2} = -\text{tg} \frac{aT}{2}$. Минимальное значение

$M_{4\min}$ приблизительно равно $\left(\frac{3\pi}{2T}\right)^4$.

Аналогичным путем отыскиваются весовые функции с минимальным значением моментов $H^2(\omega)$ и более высокого порядка.

Отношения $\frac{M_2}{M_{2\min}}$ и $\frac{M_4}{M_{4\min}}$ для весовых функций $h(t) = 1 + (1+a) \cos \frac{2\pi t}{T} + a \cos \frac{4\pi t}{T}$ (кривые 1 и 2) и $\frac{M_2}{M_{2\min}}$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Агизим, Я. Н. Гнатив, М. Ш. Розенблат. Повышение селективности и быстродействия цифрового спектроанализатора.— Отбор и передача информации, 27. Киев, «Наукова думка», 1971.
2. Ю. Л. Клоков, А. М. Цирлин. Центрирование реализаций случайных процессов при помощи цифровых вычислительных машин.— Автоматика и телемеханика, № 3, 1963, т. 24.
3. A. S. Filler. Apodization and Interpolation in Fourier-Transform Spectroscopy.— Journal of Optical Society of America, 1964, v. 54, № 6.

Поступила в редакцию 6 октября 1972 г.

УДК 62-506

А. О. ЕГОРШИН, В. А. ИВАНОВ

(Новосибирск)

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ НАСТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Метод подстраиваемой модели является одним из самых перспективных (в смысле оперативности и простоты технической реализации) методов получения оценок параметров объектов в системах автоматического управления, оптимизации, диагностики динамического эксперимента. Результат идентификации в этом методе представляется непосредственно в виде аналоговой модели исследуемого объекта, которая может быть эффективно использована для решения задач автоматизации (прогнозирование, коррекции и т. д.).

Широкое применение для реализации систем с автоматической настройкой параметров получили градиентные методы [1] и тесно связанные с ними методы функций чувствительности [2, 3]. Однако эти методы эффективны лишь применительно к квазистационарным объектам и в случае достаточно медленных квазистационарных процессов настройки.

Одним из методов синтеза алгоритмов настройки параметров в самонастраиваемой системе (СНС) с моделью является прямой метод