На рис. 3 видно, что найденная оценка $R^*(\tau, T)$ лежит в границах доверительных интервалов, следовательно, аппроксимирующая модель выбрана правильно.

Заключение. При $T/\tau_з \geqslant 30$ доверительные интервалы на оценки корреляционных функций можно строить на основе гипотезы нормального распределения оценки. Дисперсию $R^*(\tau, T)$ можно определить только в точках $\tau=0$ и $\tau=\tau_з$, а для промежуточных точек — линейной интерполяцией значений в $\tau=0$ и $\tau=\tau_з$. При $T/\tau_з < 30$ доверительные интервалы необходимо строить, пользуясь рядом Эджворта, однако информационная ценность таких оценок низка.

Влиянием оценки m^* на построение доверительных интервалов можно пренебречь, если m^* оценивается по той же длине реализации, что и $R^*(\tau, T)$.

Для негауссовых процессов с $\gamma_2 < 0$ доверительные интервалы сужаются, а при $\gamma_2 > 0$ расширяются по сравнению с доверительными интервалами нормального закона. С увеличением τ влияние негауссовости быстро уменьшается, и при τ, близких к $\tau_з$, ее можно не учитывать.

Следует отметить, что построение доверительных интервалов для оценок $R^*(\tau, T)$, определяемых по другим алгоритмам, также необходимо и требует специального исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Волгин, И. А. Саков. Определение точности оценок корреляционных функций и спектральных плотностей, рассчитанных по экспериментальным данным.— Труды V симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Вильнюс, ВНИИЭП, 1972.
2. В. В. Волгин, Р. Н. Каримов. О выборе длины реализации при вычислении корреляционных функций по экспериментальным данным.— Автоматика и телемеханика, 1967, № 6.
3. В. Я. Ротач. К вопросу о выборе оптимального опорного сигнала и оценке корреляционной функции возмущений при идентификациии САР.— Докл. научно-технической конференции по итогам НИР за 1968—1969 гг. М., МЭИ, 1969.
4. А. А. Косякин, Г. Ф. Филаретов, Г. Г. Синегуб. Экспериментальное исследование точности цифровых методов вычисления корреляционных функций.— Труды МЭИ, вып. 68, М., 1969.
5. Г. Я. Мирский. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., «Энергия», 1967.
6. У. Гренандер. Случайные процессы и статистические выводы. М., «Наука», 1961.
7. Э. Хеннан. Анализ временных рядов. М., «Наука», 1965.
8. С. Я. Виленкин. Статистические методы исследования систем автоматического регулирования. М., «Советское радио», 1967.
9. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
10. Р. Н. Каримов, В. В. Волгин. Статистические характеристики случайных сигналов в системах автоматического управления. Саратов, СПИ, 1971.
11. А. Ф. Романенко, Г. А. Сергеев. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М., «Советское радио», 1968.
12. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.

Поступила в редакцию 14 февраля 1973 г.

УДК 621.391.8 : 519.2

А. Г. СЕНИН

(Новосибирск)

ФИЛЬТРАЦИЯ И ОБНАРУЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ПО ДИСКРЕТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПУАССОНА

При решении многих практических задач измерения плотности, толщины материала с использованием радиоактивных методов контроля [1], скорости жидкости и газа — лазерными допплеровскими приборами [2] носителем информации, по которой осуществляется оценка искомого сигнала, является дискретная временная последовательность, модулируемая по частоте или амплитуде измеряемым параметром. Так, при радиоактивном контроле оценка физического параметра осуществляется по средней интенсивности излучения, которая в отсутствие иных мешающих параметров однозначно связана с измеряемой величиной.

Статистическая оптимизация таких методов измерения имеет важное практическое значение, однако многие вопросы анализа ошибок такого метода контроля и еще в большей степени синтеза остаются открытыми. Вопросам оптимальной фильтрации сигналов, обнаружению их на фоне помех, когда полезным сигналом является средняя частота дискретной случайной последовательности импульсов, описываемой распределением Пуассона, и посвящена предлагаемая работа.

1. Анализ сигналов после линейного фильтра. Пусть линейный фильтр с импульсной функцией $k(\tau)$ возбуждается дискретной последовательностью $x(t_j)$, причем средняя частота ее $\nu(t)$ является стационарным случайным процессом со средним значением ν_0 и корреляционной функцией $R_\nu(\tau)$. Примем также, что амплитуда a этих импульсов случайна и независима. С учетом специфики входных импульсов оценим статистические свойства непрерывного сигнала $y(t)$ на выходе фильтра.

Его значение в любой момент времени, очевидно, равно

$$y(t) = \sum_j a_j n_j k(t - t_j), \tag{1}$$

где a_j — амплитуда импульсов; n_j — число их за достаточно малый интервал Δt. Воспользовавшись известной формулой Кэмпбелла [3], можно выразить математическое ожидание выходного сигнала:

$$m_y(t) = \bar{a}\nu_0 \int_0^t k(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

При больших значениях t, достаточно удаленных от начального момента,

$$m_y = \bar{a}\nu_0 \int_0^\infty k(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Для определения корреляционной функции $R_y(\tau)$ оценим начальный момент

$$\overline{y^2}(\tau) = \sum_j \sum_i \overline{a_j a_i}\, \overline{n_j n_i} k(t - t_j)\, k(t - t_i) = \bar{a}^2\nu_0^2 \left(\int_0^\infty k(\tau)\, d\tau\right)^2 +$$

$$+ \bar{a}^2 \iint_0^\infty R_\nu(\tau - \theta + \lambda)\, k\theta k(\lambda)\, d\theta d\lambda + \bar{a}^2\nu_0 \int_0^\infty k(\tau + \lambda)\, k(\lambda)\, d\lambda. \tag{4}$$

Принимая во внимание, что

$$R_y(\tau) = \overline{y^2}(\tau) - m_y^2, \tag{5}$$

можно записать

$$R_y(\tau) = \bar{a}^2 \iint_0^\infty R_\nu(\tau - \theta + \lambda)\, k(\theta)\, k(\lambda)\, d\theta d\lambda +$$

$$+ \bar{a}^2\nu_0 \int_0^\infty k(\tau + \lambda)\, k(\lambda)\, d\lambda. \tag{6}$$

Располагая априорной информацией относительно амплитуды импульсов, корреляционной функции $R_y(\tau)$, определим корреляционную функцию $R_\nu(\tau)$, обусловленную флюктуацией измеряемого параметра. Соотношение (6) в частотной области можно представить иначе:

$$S_y(\omega) = \bar{a}^2 S_\nu(\omega)\, |\Phi(\omega)|^2 + \bar{a}^2\nu_0\, |\Phi(\omega)|^2, \tag{7}$$

откуда искомая спектральная плотность

$$S_\nu(\omega) = \frac{S_y(\omega)}{\overline{a^2}\,|\Phi(\omega)|^2} - \frac{\overline{a^2}\nu_0}{\overline{a^2}}. \tag{8}$$

Поскольку спектральная плотность $S_\nu(\omega)$ не должна содержать постоянной составляющей «белого» шума, при аппроксимации необходимо выполнить условие

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{S_y(\omega)}{|\Phi(\omega)|^2} = \overline{a^2}\nu_0. \tag{9}$$

Знание корреляционной функции $R_\nu(\tau)$ и средней интенсивности ν_0 оказывается в большинстве практических задач достаточным для синтеза оптимальных фильтров, минимизирующих средний квадрат ошибки контролируемого параметра.

2. Оптимальная линейная фильтрация. Пусть измеряемый параметр изменяется случайным образом и характеризуется средней интенсивностью $\nu(t)$ с математическим ожиданием ν_0 и корреляционной функцией $R_\nu(\tau)$. Допустим также наличие аддитивной помехи $\lambda(t)$ из-за мешающего параметра. Так, например, при измерении толщины изделия на погрешность оценки будут сказываться также флюктуации плотности, вызывающие увеличение суммарной ошибки. В этих условиях попытаемся отыскать оптимальный фильтр, минимизирующий средний квадрат ошибки измерения:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\left[\nu(t) - \sum_j a_j n_j k(t - t_j)\right]^2} = \nu_0^2 + \sigma_\nu^2 - 2\overline{a}\nu_0^2\int_0^\infty k(\tau)\,d\tau -$$
$$- 2\overline{a}\int_0^\infty R_\nu(\tau)\,k(\tau)\,d\tau + \overline{a}\,\nu_0^2\left(\int_0^\infty k(\tau)\,d\tau\right)^2 + \overline{a^2}\iint_0^\infty [R_\nu(\tau-\theta) + R_\lambda(\tau-\theta)] \times$$
$$\times\, k(\tau)\,k(\theta)\,d\tau d\theta + \overline{a^2}\,\nu_0\int_0^\infty k^2(\tau)\,d\tau = m_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2. \tag{10}$$

Как видим, ошибка может быть обусловлена за счет смещенности оценки

$$m_\varepsilon = \nu_0 - \overline{a}\nu_0\int_0^\infty k(\tau)\,d\tau \tag{11}$$

и дисперсии ее

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\nu^2 - 2\overline{a}\int_0^\infty R_\nu(\tau)\,k(\tau)\,d\tau + \overline{a^2}\iint_0^\infty [R_\nu(\tau-\theta) + R_\lambda(\tau-\theta)]k(\tau)k(\theta)d\tau d\theta +$$
$$+ \overline{a^2}\,\nu_0\int_0^\infty k^2(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Поскольку несмещенность оценки всегда можно обеспечить, займемся минимизацией функционала (12).

Используя стандартные приемы решения вариационных задач, получим уравнение для весовой функции $k(\tau)$, минимизирующей искомый функционал,

$$\overline{a^2}\int_0^\infty [R_\nu(\tau-\theta) + R_\lambda(\tau-\theta)]\,k(\theta)\,d\theta + \overline{a^2}k(\tau) = \overline{a}^2R_\nu(\tau), \quad \tau \geqslant 0. \tag{13}$$

Полученное соотношение является известным уравнением Винера — Хопфа, методы решения которого достаточно полно освещены в литературе [4].

Рассмотрим конкретный пример. Пусть

$$R_\nu(\tau) = \sigma_\nu^2 e^{-\beta|\tau|}, \qquad R_\lambda(\tau) = c^2\delta(\tau), \qquad \overline{a} = \overline{a^2} = 1. \tag{14}$$

Тогда (13) несколько видоизменится

$$\int_0^\infty R_\nu(\tau-\theta)\,k(\theta)\,d\theta+(c^2+\nu_0)\,k(\tau)=R_\nu(\tau),\quad \tau\geqslant 0 \tag{15}$$

Решением уравнения (15) является весовая функция

$$k(\tau)=\frac{2\sigma_\nu^2\beta}{(c^2+\nu_0)\left(\sqrt{\frac{2\sigma_\nu^2\beta}{c^2+\nu_0}+\beta^2}+\beta\right)}\,e^{-\sqrt{\frac{2\sigma_\nu^2\beta}{c^2+\nu_0}+\beta^2}\,\tau} \tag{16}$$

RC-фильтра, постоянная времени которого

$$T_k=\frac{1}{\sqrt{\frac{2\sigma_\nu^2\beta}{c^2+\nu_0}+\beta^2}}. \tag{17}$$

Поскольку фильтр с импульсной функцией (16) дает смещенную оценку математического ожидания, необходимо дополнить его параллельным включением другого фильтра с весовой функцией $p(\tau)$, постоянная времени которого $T_p\gg T_k$. Для несмещенности оценки при условиях (14) необходимо обеспечить равенство

$$\int_0^\infty [k(\tau)+p(\tau)]\,d\tau=1, \tag{18}$$

вытекающее из (11). Для оптимального фильтра (16)

$$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_\nu^2-\int_0^\infty R_\nu(\tau)\,k(\tau)\,d\tau=\sigma_\nu^2-\frac{2\sigma_\nu^4\beta}{(c^2+\nu_0)\left(\sqrt{\frac{2\sigma_\nu^2\beta}{c^2+\nu_0}+\beta^2}+\beta\right)^2}.$$

Полученные результаты позволяют оптимизировать сглаживание дискретной последовательности, когда контролируемый параметр изменяет среднее число импульсов. На практике возможна такая ситуация, при которой временная последовательность модулируется по амплитуде импульсов. Анализу такой задачи по восстановлению непрерывного сигнала посвящена работа [5].

3. Оптимальная оценка среднего значения на ограниченном интервале. Пусть среднее значение ν_0 является неизвестной величиной, которую необходимо оценить с минимальной ошибкой за интервал наблюдения T. Потребуем также, чтобы оценка была несмещенной. Поскольку

$$\overline{\nu_0^*}=\bar{a}\nu_0\int_0^T k(\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

для обеспечения несмещенности ν_0^* должно выполняться условие

$$\int_0^T k(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\bar{a}}. \tag{20}$$

Начальный момент оценки равен

$$\overline{(\nu_0^*)^2}=\bar{a}^2\nu_0^2\left(\int_0^T k(\tau)\,d\tau\right)^2+\bar{a}^2\iint_0^T R_\lambda(\tau-\theta)\,k(\tau)\,k(\theta)\,d\tau d\theta+$$
$$+\bar{a}^2\nu_0\int_0^T k^2(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

а дисперсия

$$\sigma^2_{\nu_0^*}=\bar{a}^2\iint_0^T R_\lambda(\tau-\theta)\,k(\tau)\,k(\lambda)\,d\tau d\theta+\bar{a}^2\nu_0\int_0^T k^2(\tau)\,d\tau, \tag{22}$$

где $R_\lambda(\tau)$ — корреляционная функция помехи.

Для решения поставленной задачи будем минимизировать величину

$$u = \overline{a}^2 \iint_0^T R_\lambda(\tau - \theta)\, k(\tau)\, k(\theta)\, d\tau d\theta + \overline{a}^2 \nu_0 \int_0^T k^2(\tau)\, d\tau + \mu \int_0^T k(\tau)\, d\tau, \quad (23)$$

где μ — неопределенный множитель Лагранжа. Минимизация функционала (23) сводится к решению интегрального уравнения относительно весовой функции $k(\tau)$:

$$\overline{a}^2 \int_0^T R_\lambda(\tau - \theta)\, k(\theta)\, d\theta + \overline{a}^2 \nu_0 k(\tau) + \mu = 0. \quad (24)$$

Если $R_\lambda(\tau) = c^2 \delta(\tau)$, тогда

$$k(\tau) = -\frac{\mu}{\overline{a}^2 c^2 + \overline{a}^2 \nu_0} \quad (25)$$

и оптимальной операцией сглаживания является интегрирование входного сигнала. Причем из условия (20) вытекает, что

$$\mu = \frac{\overline{a}^2 c^2 + \overline{a}^2 \nu_0}{\overline{a} T}, \quad (26)$$

а из (25) следует

$$k(\tau) = \frac{1}{\overline{a} T}. \quad (27)$$

Весовая функция, определенная из уравнения (24), обеспечивает минимальную дисперсию ошибки в оценке средней интенсивности при фиксированной длительности наблюдения.

4. Оптимальное обнаружение сигнала. Для оптимального обнаружения сигнала необходимо по известной реализации сформировать коэффициент правдоподобия [6]. Для импульсной последовательности на интервале $[0 - T]$ плотность вероятности при отсутствии сигнала

$$P_0(k_1, \ldots, k_n) = \prod_j^n \frac{(\nu_0 \Delta t)^{k_j}}{k_j!} e^{-\nu_0 \Delta t}. \quad (28)$$

Если сигнал $S(t)$ имеется, тогда, очевидно,

$$P_1(k_1, \ldots, k_n) = \prod_j^n \frac{[(\nu_0 + s(t_j))\, \Delta t]^{k_j}}{k_j!} e^{-[\nu_0 + s(t_j)]\, \Delta t}. \quad (29)$$

С уменьшением длительности элементарного интервала Δt, при котором число импульсов на каждом отрезке не более единицы, соответствующие распределения окажутся равными:

$$P_1(k_1, \ldots, k_n) = e^{-\nu_0 T - \Delta t \sum^n s_i} (\Delta t)^j \prod^j [\nu_0 + s(t_i)];$$
$$P_0(k_1, \ldots, k_n) = e^{-\nu_0 T} (\Delta t)^j \nu_0^j, \quad (30)$$

где j — число импульсов на интервале $[0 - T]$.

Ограничиваясь значениями сигнала $s(t) \ll \nu_0$, что имеет место на практике, распределение $P_1(k_1, \ldots, k_n)$ представим иначе

$$P_1(k_1, \ldots, k_n) \approx e^{-\nu_0 T - \Delta t \sum^n s_i} (\Delta t)^j \prod^j (\nu_0^j + \nu_0^{j-1} \sum^j s_i). \quad (31)$$

В этих условиях коэффициент правдоподобия

$$\Lambda(k_1, \ldots, k_n) = e^{-\Delta t \sum^n s_i} \left(1 + \frac{\sum^j s_i}{\nu_0}\right). \quad (32)$$

При соответствующем выборе уровня результат обнаружения не изменится, если решение будем принимать по величине

$$y = \sum^{j} s_i \tag{33}$$

или в непрерывном представлении

$$y(T) = \int_0^T x(t)\, s(t)\, dt. \tag{34}$$

Как видим, оптимальное обнаружение известного сигнала в дискретной последовательности можно обеспечить с помощью согласованного фильтра, импульсная функция которого

$$k(\tau) = s(T-\tau). \tag{35}$$

Для оценки возможности обнаружения сигнала необходимо определить отношение сигнал/шум

$$d^2 = \frac{[m_{ys} - m_{y0}]^2}{\sigma_y^2}. \tag{36}$$

Принимая во внимание, что при изменении средней интенсивности уровень сигнала также пропорционально меняется, получим:

$$m_{ys} = \nu_0 \int_0^T [1 + As(t)]\, s(t)\, dt; \quad m_{y0} = \nu_0 \int_0^T s(t)\, dt;$$

$$\sigma_y^2 = \nu_0 \int_0^T s^2(t)\, dt, \tag{37}$$

откуда следует

$$d^2 = A^2 \nu_0 \int_0^T s^2(t)\, dt. \tag{38}$$

Как и следовало ожидать, отношение сигнал/шум пропорционально энергии сигнала и средней интенсивности.

Рассмотренный случай обнаружения является наиболее простым. Как правило, решать задачу обнаружения приходится при неизвестной интенсивности излучения, воспринимаемого приемником. Обработка при этом несколько усложняется. Если условные распределения таковы:

$$P_1(k_1, \ldots, k_n/\nu) = e^{-\Delta t \sum_i^n s_i - \nu T} (\Delta t)^j \prod^j (\nu + s_i), \quad P_0(k_1, \ldots, k_n/\nu) = $$
$$= e^{-\nu T} (\Delta t)^j \nu^j, \tag{39}$$

то соответствующие безусловные распределения окажутся равными:

$$P_1(k_1, \ldots, k_n) = \lim_{\delta \to 0} \delta e^{-\int_0^T s(t)\, dt} (\Delta t)^j \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{-\nu T}\left(\nu^j + \nu^{j-1} \sum^j s_i\right) d\nu =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \delta e^{-\int_0^T s(t)\, dt} (\Delta t)^j \left[\frac{\Gamma(j+1)}{T^{j+1}} + \frac{\Gamma(j)}{T^j} \sum^j s_i\right]; \tag{40}$$

$$P_0(k_1, \ldots, k_n) = \lim_{\delta \to 0} \delta (\Delta t)^j \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{-\nu T} \nu^j d\nu = \lim_{\delta \to 0} \delta (\Delta t)^j \frac{\Gamma(j+1)}{T^{j+1}}. \tag{41}$$

Коэффициент правдоподобия при этом

$$\Lambda(k_1, \ldots, k_n) = \frac{P_1(k_1, \ldots, k_n)}{P_0(k_1, \ldots, k_n)} = \left(1 + \frac{T}{j} \sum^j s_i\right) e^{-\int_0^T s(t)\, dt}, \tag{42}$$

а решение можно принимать по величине

$$y = \frac{\sum^{j} s_i}{j} \qquad (43)$$

или в непрерывном представлении

$$y(T) = \frac{\int_0^T x(t)\, s(t)\, dt}{\int_0^T x(t)\, dt}. \qquad (44)$$

В последнем случае обработка оказывается нелинейной в отличие от аналогичной задачи обнаружения сигналов в гауссовых помехах [7].

Необходимость дополнительного нормирования выходного сигнала согласованного фильтра и обусловлена отсутствием априорной информации относительно среднего значения интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Таточенко. Радиоактивные изотопы в приборостроении. М., Атомиздат, 1960.
2. Ю. Н. Дубнищев, В. П. Коронкевич, В. С. Соболев, А. А. Столповский, Е. Н. Уткин, Н. Ф. Шмойлов. Измерение параметров турбулентных потоков с помощью лазерного допплеровского измерителя скорости.— Автометрия, 1971, № 1.
3. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.
4. В. И. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
5. А. Г. Сенин. О восстановлении непрерывного случайного процесса по дискретной последовательности с пуассоновским распределением частоты следования импульсов.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 3.
6. К. Хелстром. Статистическая теория обнаружения сигналов. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
7. А. Г. Сенин. Оптимальное обнаружение сигнала на фоне помех с неизвестным средним значением.— Радиотехника, 1969, № 9.

Поступила в редакцию 18 мая 1973 г.

УДК 621.391.822.3 : 621.317.799

В. А. ГЕРАНИН, Н. А. МИРОНОВ,
В. В. ПОДОПРИГОРИН, М. И. ШЛЯКЦУ
(*Киев*)

КОРРЕЛЯЦИЯ ОТКЛИКОВ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА НЕСТАЦИОНАРНОЕ СЛУЧАЙНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Точность и достоверность результатов статистического анализа, проводимого с помощью многоканальных измерительных систем, в значительной мере определяется степенью взаимной корреляции откликов отдельных каналов измерительной системы на общее воздействие. В частности, исследователю важно знать соотношение между характеристиками воздействия $X(t)$ и параметрами измерительной системы, при котором коэффициент взаимной корреляции $r_{Y_p Y_q}(t_1, t_2)$ настолько мал, что отклики $Y_p(t)$ и $Y_q(t)$ (p-го и q-го каналов соответственно) практически некогерентны.