АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 2 1974

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ СБОРА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

УДК 519.2 : 62-50

И. В. СМЕРТИНЮК
(Новосибирск)

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГАУССОВЫХ СТАТИСТИК

1. **Постановка задачи.** При проведении экспериментальных исследований довольно часто возникает следующая ситуация: с помощью измеренных значений $x_j(t_s)$ сигналов $A_j(\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_k}, t)$

$$x_j(t_s) = A_j(\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_k}, t_s) + \xi_j(t_s)\ (j = \overline{1, m};\ s = \overline{1, n_j}) \tag{1}$$

и априорного значения функциональных зависимостей

$$\Pi_l(\psi_{l_1}, \ldots, \psi_{l_k}, t) = 0 \quad (l = \overline{1, r};\ l_k \leqslant k) \tag{2}$$

необходимо произвести оценивание функций:

$$F_\alpha(\tau) = F_\alpha(\psi_{\alpha_1}, \ldots, \psi_{\alpha_k}, \tau) \quad (\alpha = \overline{1, f};\ \alpha_k \leqslant k). \tag{3}$$

Здесь $\xi_j(t_s)$ — погрешности измерения — гауссовы некоррелированные величины с нулевыми математическими ожиданиями и заданными дисперсиями σ_{js}^2, а n_j — объем измерений сигналов

$$A_j(\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_k}, t),\ k = \max_j j_k.$$

Вид функций $F_\alpha(\tau)$ и $A_j(\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_k}, t)$ предполагается заданным. Параметры $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — неизвестные постоянные. Под оцениванием функций $F_\alpha(\tau)$ здесь понимается, естественно, определение величин, полученных при подстановке в (3) конкретных значений τ. Предполагается также, что текущий параметр t — время. В случае, если t имеет какой-либо другой смысл — расстояние, угол и т. п.,— характер рассуждений фактически не меняется, может измениться лишь интерпретация получаемых результатов.

Функции (3), вообще говоря, оцениваются при других значениях текущего параметра t в сравнении с измеряемыми сигналами. Чтобы выделить указанное обстоятельство, а также для облегчения различения моментов измерения сигналов (1) и моментов, при которых производится оценивание функций (3), в последних для текущего параметра используется другое обозначение — τ.

Легко видеть, что введенная с помощью (1)—(3) модель включает достаточно широкий круг задач. Ограничимся только двумя примерами.

I. Требуется оценивать сами измеряемые сигналы (соотношения (2) пока опустим):

$$F_\alpha(\psi_{\alpha_1}, \ldots, \psi_{\alpha_k}, t) \equiv A_\alpha(\psi_{\alpha_1}, \ldots, \psi_{\alpha_k}, t)\ (m = f;\ \alpha = j). \tag{4}$$

При условии $\tau = t_{n_j}$ возникает обычная задача фильтрации, при $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_{n_j}$ — задача сглаживания, при $\tau > t_{n_j}$ — задача прогнозирования. Указанные задачи линейны либо нелинейны в зависимости от вида функций (1) и (3).

II. Требуется оценить параметры $\psi_1, \ldots, \psi_f$ с помощью измеренных значений сигналов $A_j(\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_k}, t)$ (1), зависящих не только от искомых, но и от ряда мешающих параметров $\psi_{f+1}, \ldots, \psi_k$:

$$F_\alpha\left(\psi_{\alpha_1}, \ldots, \psi_{\alpha_k}, \tau\right) \equiv \psi_\alpha \left(\alpha = \overline{1, f}\right). \tag{5}$$

Эта задача относится к классу задач оценки параметров при наличии мешающих.

Значимость и широкая распространенность в практике измерений задач, описываемых соотношениями (1)—(3), обусловливаются также следующими обстоятельствами.

Во-первых, измерительные устройства и приборы имеют сравнительно стабильную конструкцию, и совокупность сигналов, доступная измерению с их помощью, зачастую также ограничена в силу обстоятельств, связанных, как правило, не с интересами задачи оценивания функций $F_\alpha\left(\psi_{\alpha_1}, \ldots, \psi_{\alpha_k}, \tau\right)$, а, например, с возможностями изготовления аппаратуры в условиях промышленного предприятия и т. п. Эти ограничения во многих случаях можно описать соотношениями типа (2), но избавиться от них обычно не удается. Стремление воспользоваться большой гибкостью способов и алгоритмов оценивания интересующих нас величин и функций, а также всей информацией о $F_\alpha\left(\psi_{\alpha_1}, \ldots, \psi_{\alpha_k}, \tau\right)$, содержащейся в измерениях, приводит к модели (1)—(3).

Во-вторых, измеренные значения сигналов всегда зависят от ряда параметров, определяемых инструментальными погрешностями самих измерительных устройств и приборов. С этой точки зрения задача (4) несколько идеализирована, поскольку в ней инструментальные погрешности подобного рода не учитываются.

С помощью модели (1)—(3) удается описывать и такие ситуации, когда неизвестные параметры меняются со временем случайным образом. Например, из анализа конкретной задачи (оценка величины производных, характер спектра и т. д.) часто можно подобрать такие числа r_i и функция $\alpha_{ij}(t)$, что на всем интервале наблюдения и оценивания $(0, T_0)$ в рамках требуемой точности выполняются соотношения:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i} \psi'_{ij} \alpha_{ij}(t) \left(i = \overline{1, k}\right). \tag{6}$$

Здесь ψ'_{ij} — неизвестные коэффициенты. Подставляя (6) в (1)—(3), придем к прежней задаче, но теперь уже относительно параметров ψ'_{ij} $(i = \overline{1, k};\ j = \overline{1, r_i})$.

2. Выбор способа решения. Предварительно введем для упрощения выкладок одно переобозначение. Именно, поскольку мы собираемся оценивать каждую функцию $F_\alpha\left(\psi_{\alpha_1}, \ldots, \psi_{\alpha_k}, \tau\right) \left(\alpha = \overline{1, f}\right)$ в отдельности, то в силу общности их структуры достаточно рассмотреть какую-либо одну из них, которую обозначим $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$. Остальные функции будут оцениваться совершенно аналогично.

Обычно для получения оценки $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ в инженерной практике используется классический метод максимального правдоподобия (ММП). В случае линейной модели применение ММП часто позволяет получать несмещенные оценки, оптимальные по критерию минимума дисперсии в классе всех несмещенных оценок (этим критерием оптимальности будем пользоваться и в дальнейшем) [1].

Наличие же нелинейных зависимостей в (1)—(3) приводит к тому, что оценки ММП будут несмещенными и оптимальными лишь асимптотически, т. е. для достаточно больших выборок. При ограниченном объеме измерений, наряду с отсутствием, вообще говоря, оптимальности, может появиться смещение, для определения которого, так же как и для определения дисперсии оценки, не существует универсальной методики, достаточно простой в использовании.

Следует отметить еще одну особенность применения ММП в рассматриваемой нами задаче. Как известно, при оценке функции $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ по ММП вместо параметров $\psi_i\left(i = \overline{1, \beta}\right)$ в нее подставляются их значения, полученные в результате минимизации функции правдоподобия по всем $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Таким образом, при $\beta < k$ мы вынуждены получать также и оценки мешающих параметров $\psi_{\beta+1}, \ldots, \psi_k$. В линейной модели это излишнее усложнение обычно удается легко обойти, однако в общем случае ММП не позволяет избавиться от их определения.

Указанные обстоятельства, а также затруднения, возникающие при выборе нулевого приближения и обеспечении сходимости итерационной процедуры минимизации функции правдоподобия, ограничивают применение ММП в нелинейных задачах и стимулируют поиски других способов получения оценок (3).

Попытаемся при построении выражения для оценки $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ ограничиться рассмотрением вместо результатов измерений (1) соответствующих достаточных статистик. Как известно, достаточная статистика $T^*(x)$ (структуру ее пока не уточняем) для $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$, являющаяся функцией от (1), сохраняет всю информацию о $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$, содержащуюся в $x_j(t_s)\left(j = \overline{1, m};\ s = \overline{1, n_j}\right)$. Оценка $\hat{F}(T^*)$,удовлетворяющая условию несмещенности

$$F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(T^*) f(T^*)\, dT^*, \qquad (7)$$

будет оптимальной по критерию минимума дисперсии в классе всех несмещенных оценок $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$, непосредственно зависящих от измеряемых величин (1) [2]. Здесь $f(T^*)$ — плотность функции распределения T^*, которая зависит, вообще говоря, от параметров $\psi_1, \ldots, \psi_\beta$.

Однако получение оценки $\hat{F}(T^*)$ из уравнения (7), в свою очередь, осложняется рядом обстоятельств. Во-первых, соотношение (7) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, которое принадлежит в общем случае к классу некорректных задач [3]. Во-вторых, плотность функции распределения $f(T^*)$ определяется аналитической структурой оцениваемой функции (3), измеряемых сигналов (1) и условий (2). Следовательно, для каждой конкретной задачи нужно заново находить вид достаточной статистики, определять плотность ее функции распределения и отыскивать устойчивые решения (7).

Все же этот путь решения представляется довольно привлекательным при выборе рационального способа обработки информации. Действительно, пусть необходимо оценить функцию $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$. Значит, нужно подобрать такие сигналы, которые, во-первых, доступны измерению и, во-вторых, содержат информацию об оцениваемой функции. Если же затем ограничиться рассмотрением только достаточных статистик для $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$, то намного сокращается объем данных, подлежащих обработке. Кроме того, искомая оценка является несмещенной и оптимальной при конечных объемах измерений. При этом также устраняется этап оценивания мешающих параметров.

Поскольку ошибки измерения сигналов (1) статистически взаимно независимы, то информацией о $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ будут обладать лишь те сигналы, аналитическая структура которых достаточно близка к виду оцениваемой функции. Следовательно, проанализировав структуру сигналов $A_j(\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k}, t)$ $(j = \overline{1, m})$, функции $F(\psi_1, \ldots \ldots, \psi_\beta, \tau)$ и зная статистические характеристики ошибок измерения, можно выбрать, исходя из реальных условий, состав измерительных устройств и приборов, сигналы, подлежащие измерению, и объемы их измерений с тем, чтобы обеспечить заданную точность оценки $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ при наименьших затратах.

Что же касается отмеченных выше трудностей, связанных с использованием достаточных статистик, то оказывается, что значительную часть их можно устранить, если в полной мере использовать наше предположение о том, что аддитивные ошибки измерений являются гауссовыми некоррелированными случайными величинами.

В самом деле, пусть сигналы $A_j(\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k}, t)$ представимы в виде линейных функций от некоторых величин θ_{ji} $(j = \overline{1, m}; i = \overline{1, p_j})$, зависящих от $\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k}$ и, следовательно, также являющихся неизвестными постоянными (сами функции $\theta_{ji}(\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k})$ могут быть и нелинейными):

$$A_j(\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k}, t) = \sum_{i=1}^{p_j} \theta_{ji}(\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k}) \varphi_{ji}(t), \tag{8}$$

где $\varphi_{ji}(t)$ — заданные функции времени, линейно независимые по индексу i. Тогда, пользуясь соотношением (1), легко установить, что достаточные статистики T_{ji} для вновь введенных параметров θ_{ji}, являющиеся линейными функциями погрешностей измерения, отыскиваются по стандартным формулам и распределены по нормальному закону.

Предположим далее, что $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ может быть представлена в виде функции $F(\theta, \tau)$, которая, вообще говоря, нелинейно зависит от θ_{ji}. Тогда нетрудно показать, что существует возможность получения устойчивых решений уравнения (7), рассматриваемого относительно достаточных статистик T_{ji} для соответствующих θ_{ji}, сравнительно простыми способами.

Основной результат (полученный в п. 3), позволяющий реализовать указанную возможность, формулируется следующим образом: если оцениваемая функция представима в виде степенного полинома относительно θ_{ji}

$$F(\theta, \tau) = \sum_\gamma c_\gamma(\tau) \prod_{q=1}^{k} \theta_q^{s_{\gamma q}}, \tag{9}$$

то линейная комбинация полиномов Эрмита

$$\hat{F}(T, \tau) = \sum_\gamma c_\gamma(\tau) \prod_{q=1}^{k} \lambda_q^{s_{\gamma q}} \mathrm{H}_{s_{\gamma q}}(\lambda_q T_q) \tag{10}$$

является ее несмещенной оценкой. Здесь $\lambda_q = [2D\{T_q\}]^{-\frac{1}{2}}$, где $D\{T_q\}$ — дисперсия T_q; $\mathrm{H}_{s_{\gamma q}}(\lambda_q T_q)$ — полином Эрмита $s_{\gamma q}$-го порядка относительно $\lambda_q T_q$. Для упрощения обозначений система индексов ji заменена системой индексов q, которая при необходимости будет использована и в дальнейшем уже без оговорок.

Наличие соответствия между (9) и (10) позволяет избавиться от необходимости решения интегрального уравнения для каждой задачи в отдельности. Взамен появляются задачи выбора подходящей системы величин θ_{ji} $(j = \overline{1, m};\ i = \overline{1, p_j})$, нахождения вида нелинейной функции $F(\theta, \tau)$ и аппроксимация ее степенными полиномами, которые решаются классическими методами математического анализа.

3. Основные соотношения. Прежде всего уточним описание модели (1)—(3). Именно совокупность измеряемых сигналов $A_j(\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{i_k}, t)$

$\left(j=\overline{1,m}\right)$ будем называть существенно полной относительно оцениваемой функции $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$, если из совокупности $\theta_{ji}\left(\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_k}\right)$ (8) можно выбрать функционально не связанные между собой величины, такие, что из них можно составить систему (или несколько систем) функциональных уравнений вида

$$\theta_{ji} - \theta_{ji}\left(\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_k}\right) = 0, \tag{11}$$

среди решений которых наряду, возможно, с другими $-\psi_{\beta+1}, \ldots, \psi_{\beta'}$ есть и параметры $\psi_1, \ldots, \psi_\beta (\beta \leqslant \beta' \leqslant k)$:

$$\psi_i = \psi_i(\theta) \quad \left(i=\overline{1,\beta}\right). \tag{12}$$

Это определение позволяет придать конкретный смысл высказанному ранее требованию: совокупность измеряемых сигналов должна содержать информацию об оцениваемой функции.

Системы функциональных уравнений подбираются таким образом, чтобы число уравнений в каждой из них соответствовало количеству неизвестных. Для простоты анализа будем предполагать, что каждый из параметров $\psi_1, \ldots, \psi_{\beta'}$ является решением только какой-либо одной системы уравнений, т. е. что общее число уравнений (11) равно $\beta' \leqslant k$.

Условия теоремы о неявных функциях, характер поведения сигналов и ограниченность диапазонов возможных значений параметров $\psi_1, \ldots, \psi_k$ обеспечивают разрешимость (11) и дифференцируемость $\psi_i(\theta)$, если между θ_{ji} в (11) и искомыми параметрами существует взаимно однозначное соответствие [4]. Однако последнее требование не всегда выполняется на практике. В том случае, когда различным совокупностям неизвестных параметров в (11) соответствуют одни и те же значения θ_{ji}, следует перейти к измерению другой совокупности сигналов, где данное условие будет соблюдаться.

Что же касается функций (3), то в дальнейшем их можно рассматривать в виде степенных полиномов (9), нисколько не теряя в общности. В самом деле, нелинейная функция $F(\theta, \tau)$, полученная подстановкой (12) в $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$, может быть аппроксимирована степенным полиномом в ограниченной области относительно своих переменных с любой заданной абсолютной точностью при условии, по крайней мере, ее непрерывности [5]. Допустимость рассмотрения θ_{ji} $\left(j=\overline{1,m};\ i=\overline{1,p_j}\right)$ только на конечных интервалах следует из ограниченности сигналов на интервале наблюдения и оценивания $(0, T_0)$.

Представление вида (8) существует (в рамках заданной точности) для всех достаточно гладких функций, которые обычно встречаются в приложениях. В простейшем случае его можно получить, разлагая функции $A_j(\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_k}, t)$ в ряд Тейлора в какой-либо точке интервала $(0, T_0)$ и сохраняя только члены, значимые по своей величине.

Для широкого класса распределений, в том числе и для нормального, достаточная статистика $T(x)$, как известно, удовлетворяет соотношению [2]

$$f_\theta(x) = g[T(x),\ \theta]h(x), \tag{13}$$

где $f_\theta(x)$ — плотность распределения выборки; $g[T(x),\ \theta]$ — функция, зависящая от выборочных значений случайных величин только через $T(x)$; $h(x)$ — функция, не зависящая явно от параметра θ.

Следовательно, в соответствии с (1), (8) и (13) достаточные статистики $T_{ji}(x)$ для θ_{ji} будут иметь вид

$$T_{ji} = \sum_{s=1}^{n_i} x_j(t_s)\,\varphi_{ji}(t_s)\,\sigma_{js}^{-2}. \tag{14}$$

Статистики T_{ji} могут быть, вообще говоря, по индексу i коррелированы между собой, и их корреляционная матрица B_j представляется следующим образом:

$$B_j = \{b_{jil}\} = \left\{\sum_{s=1}^{n_j} \varphi_{ji}(t_s)\,\varphi_{jl}(t_s)\,\sigma_{js}^{-2}\right\} \quad \left(i, l = \overline{1, p_j}\right). \tag{15}$$

Однако мы будем предполагать, что матрицы B_j заведомо диагональны (10):

$$b_{jil} = \begin{cases} (2\lambda_{ji})^{-1}; & i = l; \\ 0 \quad ; & i \neq l, \end{cases} \tag{16}$$

так как в противном случае всегда можно произвести предварительную ортогонализацию достаточных статистик [4].

Тогда, как отмечалось в п. 2, по виду степенного полинома $F(\theta, \tau)$ (9) можно сразу же определить выражение для его несмещенной оценки $\hat{F}(T, \tau)$ (10) [4].

Аналогично $\hat{F}(T, \tau)$ можно было бы получать несмещенные оценки ее дисперсии и моментов более высоких порядков. Однако в приложениях часто оказывается более удобным использовать для определения точности оценок верхние границы их дисперсий:

$$D\{\hat{F}(T, \tau)\} = \max_{\theta \in \Gamma} [G(\theta, \tau) - F^2(\theta, \tau)], \tag{17}$$

где Γ — область возможных значений θ;

$$G(\theta, \tau) = E\{\hat{F}^2(T, \tau)\}. \tag{17a}$$

Выражение $\hat{F}^2(T, \tau)$ можно представить линейной комбинацией полиномов Эрмита, что позволяет для определения коэффициентов (17а) использовать соответствие (9) и (10).

Если выполняется условие полноты достаточных статистик, которое в нашей задаче эквивалентно функциональной независимости значений θ_{ji}, входящих в $F(\theta, \tau)$, то решение (7) будет единственным [2]. Условие единственности нарушается при наличии соотношений

$$R_l(\theta) = 0 \left(l = \overline{1, d}\right), \tag{18}$$

составленных из уравнений, полученных из совокупности θ_{ji}, не входящих в (11) и зависящих только от $\psi_1(\theta), \ldots, \psi_{\beta'}(\theta)$, и из тех уравнений (2), которые тоже обладают свойством независимости от $\psi_{\beta'+1}, \ldots, \psi_k$. При этом предполагается, что уравнения (18) между собой функционально независимы и что процесс исключения некоторых из неизвестных параметров $\psi_1, \ldots, \psi_k$ (если это возможно) уже произведен.

Таким образом, при отсутствии уравнений (18) несмещенная оценка $\hat{F}(T, \tau)$, полученная в соответствии с (9) и (10), будет оптимальной в силу единственности решения (7). В противном случае несмещенных оценок функции $F(\theta, \tau)$, каждая из которых является решением уравнения (7), может быть много, и процедура получения оптимальной оценки, определяемая структурой соотношений (18), значительно усложняется [2, 6].

Если не учитывать дополнительной информации о $F(\tau)$, содержащейся в (18), то оценка (10) остается несмещенной, хотя, вообще говоря, она не оптимальна. Однако для определения точности любой конкретной несмещенной оценки вида (10) выражение (17) сохраняет свою истинность.

Затруднения, возникающие с получением оптимальных оценок $\hat{F}(T, \tau)$ при наличии (18), объясняются тем, что используемые нами статистики T_{ji} являются достаточными для вспомогательных параметров θ_{ji}, а не для самой функции $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$.

4. Асимптотические оценки. В ряде случаев оказывается целесообразным воспользоваться более простым методом оценивания. Именно в функцию $F(\theta, \tau)$, еще не аппроксимированную полиномом (9), вместо θ_q подставляются их несмещенные оценки (10) $2\lambda_q^2 T_q$ $(q=\overline{1,\beta'})$. В результате полученное выражение

$$\hat{F}_a(T,\tau) = F(2\lambda^2 T, \tau) \tag{19}$$

является несмещенной и в отсутствие уравнений (18) оптимальной оценкой $F(\psi_1 \ldots, \psi_\beta, \tau)$, правда, лишь асимптотически, т. е. при больших объемах измерений [4]. Приближенные выражения для дисперсии $D\{\hat{F}_a\}$ и смещения $S\{\hat{F}_a\}$ при ограниченных объемах измерений имеют следующий вид:

$$D\{\hat{F}_a\} = \left[\frac{\partial F}{\partial \theta}\right]^T \Lambda^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial \theta}\right], \tag{20}$$

где

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \theta}\right] = \left\{\frac{\partial F}{\partial \theta_q}\right\} \quad (q=\overline{1,\beta'});$$

$\left[\frac{\partial F}{\partial \theta}\right]^T$ — вектор, транспонированный относительно $\left[\frac{\partial F}{\partial \theta}\right]$; Λ — диагональная матрица с элементами $\{b_q\}$ $(q=\overline{1,\beta'})$ (16);

$$S\{\hat{F}_a\} = \sum_{q=1}^{\beta'} \frac{\partial^2 F(\theta, \tau)}{\partial \theta_q^2} \lambda_q^2. \tag{21}$$

Наличие дополнительных условий (18) можно использовать для уменьшения дисперсии оценок, аналогично п. 3. Кроме того, во многих практических задачах оказывается, что среднеквадратичная точность $E\{(\hat{F} - F)^2\}$ асимптотических оценок выше, чем точность несмещенных оценок, получаемых более сложным путем.

Следует отметить, что во многих случаях оценки ММП также могут иметь вид (19). Действительно, оценки θ_{ji} при использовании ММП в силу линейной зависимости сигналов от них будут несмещенными и, если выполняются условия единственности, оптимальными [1]. Значит, они будут равны $2\lambda^2_{ji} T_{ji}$ (10), а оценки $F(\theta, \tau)$, получаемые по ММП, будут совпадать с асимптотическими.

В то же время есть и отличия. Во-первых, верхние границы дисперсии и смещения асимптотических оценок определяются довольно просто из общих соотношений [4]. Во-вторых, наличие связей между параметрами можно использовать для повышения точности оценок.

5. Заключение. Применение предложенной методики оценивания позволяет облегчить решение многих задач, встречающихся в процессе обработки результатов измерений. Так, оценка величины $F(\tau) = \psi\alpha(\tau)$ по полученным значениям сигнала $A(\psi, t) = \sqrt[m]{\psi}\,\beta(t)$ (m — любое целое положительное число; $\alpha(\tau)$ и $\beta(t)$ — заданные функции), несмещенная и оптимальная при любом конечном объеме измерений, начиная с первого, определяется непосредственно: $\hat{F}(T,\tau) = \lambda^m \mathrm{H}_m(\lambda T)\alpha(\tau)$ (10).

Однако необходимость проведения ряда аналитических преобразований, довольно простых в данном примере, иногда приводит к затруднениям. В самом деле, выбор подходящего представления сигналов (8), решение системы функциональных уравнений (11), аппроксимация нелинейных функций (3) степенными полиномами (9), определение дисперсий оценок (17) могут потребовать значительного объема вычислений.

В случае проведения большого количества однотипных экспериментов, контроля качества серийной продукции и т. п. эти вычисления делаются только один раз, а простота вида оценок (10) или (19) приводит в конечном счете к экономии машинного времени при обработке данных на ЭЦВМ. Если же структура сигналов от одного эксперимента к друтому существенно меняется, то другие методы (например, ММП) могут оказаться более эффективными.

Следует отметить еще одно обстоятельство. А именно, хотя решение (7) является строго несмещенной оценкой полинома (9), однако неточность в вычислении $\hat{F}(T, \tau)$ сказывается в появлении смещения, равного указанной погрешности. Следовательно, оценка $\hat{F}(T, \tau)$ будет на самом деле оптимальной для $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ в классе всех ее оценок, имеющих смещение, обусловленное точностью проведения преобразований в $\theta \in \Gamma$ и вычисления $\hat{F}(T, \tau)$.

Поскольку смещение ограничено суммарной погрешностью, возникающей при представлении $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ полиномом (9) и вычислении $\hat{F}(T, \tau)$, то его легко оценить. При необходимости, как нетрудно видеть, его можно уменьшить до требуемых пределов за счет увеличения объема вычислений. Аналогичный вывод можно сделать и в отношении асимптотических оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968, с. 286—289, 304.
2. Ю. В. Линник. Статистические задачи с мешающими параметрами. М., «Наука», 1966.
3. Справочная математическая библиотека. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968, с. 154.
4. И. В. Смертинюк. Оптимальное оценивание параметров сигнала заданной аналитической структуры при нелинейной обработке результатов измерений.— Автометрия, 1970, № 5.
5. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
6. А. М. Каган. Теория оценивания для семейств с параметрами сдвига, масштаба и экспонентных.— Труды МИ АН СССР им. Стеклова, т. 104. Л., «Наука», 1968.

Поступила в редакцию 16 ноября 1972 г.

УДК 621.317.080

Ш.-С. О. АБДУЛАЕВ, Б. А. БЕСЕДИН

(Новосибирск)

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРУЮЩИХ И СГЛАЖИВАЮЩИХ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Определение фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем (ИИ-систем). Под ИИ-системой обычно подразумевают совокупность измерительных приборов, сети передачи измерений и пункта (пунктов) обработки этих измерений. Как большие ИИ-системы можно отнести к управляемым сетям массового обслуживания [1—3]. Различные уточнения этого представления, как правило, связаны с конкретно изучаемыми сторонами ИИ-системы (см. [4—8] и др., в том числе библиографию в [7]).

В настоящее время растет число реальных ИИ-систем с распределенными параметрами, которые нередко охватывают огромные территории. Это обстоятельство ставит новые задачи рационального проектирования и эксплуатации таких систем. Среди многих других важнейшей практической задачей является следующая: сколько измерительных