

где

$$I^*(\Delta) = \frac{1}{RN\Delta t^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \nu S^*(\lambda) S^*(\lambda)^* d\lambda \right].$$

Отметим, что для рассматриваемого нами случая задания помехи f_k и процесса x_k , $k = -\infty \div \infty$, корректной оказывается и задача идентификации звена при выбранном тестовом сигнале (27). Величина, аналогичная (21), в дискретном случае может быть представлена

$$D[\Phi^*(\Delta h)] = \frac{1}{N(\Delta t)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{S}^f(\lambda) \Omega}{\tilde{S}^x(\lambda)} < \infty.$$

Таким образом, нами получены для непрерывного и дискретного случаев оптимальные тестовые сигналы, позволяющие определить весовую функцию звена так, чтобы дисперсия погрешности прогнозирования случайного стационарного процесса была минимальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Ибрагимов. Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса.— Теория вероятности и ее применения, 1963, т. VIII, вып. 4.
2. Г. Дженкинс, Д. Ваттс. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1 и 2. М., «Мир», 1971.
3. И. И. Перельман. Точность восстановления импульсной характеристики по данным нормальной эксплуатации объекта.— Труды I Всесоюзного симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике. М., «Наука», 1970.

Поступила в редакцию 25 июля 1972 г.

УДК 621.391 : 62-50

**Б. Д. БОРИСОВ, М. И. МОГИЛЬНИЦКИЙ,
А. Г. СЕНИН, М. С. ХАЙРЕДИНОВ**
(Новосибирск)

АДАПТИВНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ СИГНАЛА

В измерительной практике для уменьшения влияния помех и повышения точности измерения часто используют сглаживание сигнала.

При известных корреляционных функциях сигнала $R_m(\tau)$ и помехи $R_n(\tau)$ оптимальная фильтрация обеспечивается фильтром с импульсной функцией $k(\tau)$, определяемой из уравнения [1]

$$R_m(\tau) = \int_0^{\infty} [R_m(\tau - \theta) + R_n(\tau - \theta)] k(\theta) d\theta, \tau \geq 0. \quad (1)$$

Очевидно, если меняются статистические свойства сигналов, необходимо также менять импульсную функцию фильтра. В этих условиях синтезировать оптимальный фильтр затруднительно, поэтому целесообразно использовать такие обучающиеся сглаживающие устройства, свойства которых меняются за счет изменения его параметров [2, 3].

Однако целый ряд практических требований — возможность фильтрации в широком диапазоне изменения статистических характеристик исходных процессов, обеспечение несмещенности оценки сигнала, сравнительная простота — существенно ограничивает использование известных приемов оптимизации. По этой причине необходимы иные подходы к решению проблемы фильтрации.

В настоящее время для сглаживания широкополосных сигналов применяется простейший *RC*-фильтр, импульсная функция которого

$$k(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}, \quad (2)$$

где $T = 1/\alpha$ — постоянная времени фильтра. Заметим, что при воспроизведении полезного сигнала со спектральной плотностью

$$S_m(\omega) = \frac{2\beta\sigma_m^2}{\beta^2 + \omega^2} \quad (3)$$

на фоне помехи в виде «белого» шума с интенсивностью c^2 , как следует из (1), частотная характеристика оптимального фильтра имеет вид

$$\Phi(\omega) = \frac{2\beta\gamma^2}{(\sqrt{2\beta\gamma^2 + \beta^2} + \beta)(\sqrt{2\beta\gamma^2 + \beta^2} + i\omega)}, \quad \gamma^2 = \frac{\sigma_m^2}{c^2}. \quad (4)$$

Для значений $\gamma \gg \beta$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\sqrt{2\beta\gamma^2}}} \quad (5)$$

и оптимальным фильтром является *RC*-звено, постоянная времени которого $T = \frac{1}{\sqrt{2\beta\gamma^2}}$. Известно также [4], что *RC*-фильтр оптимальным образом воспроизводит на фоне «белого» шума ступенчатое изменение сигнала, однако в реальных условиях для успешной фильтрации необходимо соответствующим образом менять его постоянную времени. Анализ структурной схемы такого фильтра, постоянная времени которого меняется в зависимости от статистических свойств исходного процесса, посвящена предлагаемая работа.

Основная трудность практической реализации адаптивного *RC*-фильтра заключается в оценке оптимального значения его постоянной времени. Так, для корреляционной функции сигнала

$$R_m(\tau) = \sigma_m^2 e^{-\beta|\tau|} \quad (6)$$

и помехи в виде «белого» шума со спектральной плотностью c^2 средний квадрат ошибки

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^2 &= \sigma_m^2 - 2 \int_0^{\infty} R_m(\tau) k(\tau) d\tau + \iint_0^{\infty} [R_m(\tau - \theta) + R_n(\tau - \theta)] k(\tau) k(\theta) d\tau d\theta = \\ &= \sigma_m^2 + 0,5 \alpha c^2 - \frac{\alpha \sigma_m^2}{\alpha + \beta}, \end{aligned} \quad (7)$$

а оптимальное значение α^* , минимизирующее (7), равно

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{2\beta\gamma^2} - \beta; & \sqrt{2\beta\gamma^2} \geq \beta; \\ 0; & \sqrt{2\beta\gamma^2} < \beta. \end{cases} \quad (8)$$

Для $\gamma \gg \beta$ оптимальное значение постоянной времени $T^* = 1/\alpha^*$ совпадает, очевидно, с постоянной времени оптимального фильтра (5).

Как видим, для оценки оптимального значения T^* в общем случае необходима такая информация, получение и последующая обработка которой являются достаточно сложными операциями, поэтому для оценки искомой постоянной времени желательна более простая процедура вычислений.

Будем полагать, что помеха $n(t)$ некоррелирована с сигналом $m(t)$, а частотный спектр ее существенно шире спектра сигнала. При этих условиях можно рассчитывать на эффективную фильтрацию, поэтому использование адаптивного фильтра наиболее целесообразно. Примем также математическое ожидание сигнала и помехи равным нулю и с учетом ранее сформулированных предположений о характере спектра сигнала и помехи допустим, что на интервале корреляции помехи τ_n полезный сигнал практически не меняется. Из этого следует

$$R_n(\tau_n) = 0, \quad R_m(\tau_n) = \sigma_m^2. \quad (9)$$

Если удастся воспроизвести на выходе RC-фильтра без существенных искажений полезный сигнал, тогда, очевидно, дисперсия выходного сигнала $\sigma_{m^*}^2$ близка к дисперсии σ_m^2 . Разность этих двух величин может использоваться в качестве управляющего воздействия, изменяющего постоянную времени фильтра. Структурная схема такого адаптивного фильтра представлена на рис. 1.

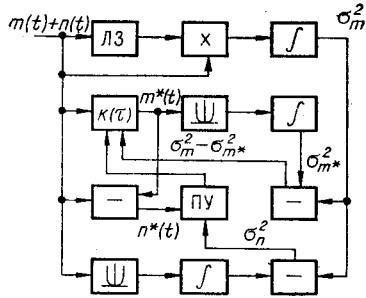


Рис. 1.

Выходной сигнал подается по двум параллельным каналам, осуществляющим оценку дисперсии полезного сигнала $m(t)$ и его оценки $m^*(t)$. Определение первой величины обеспечивается введением линии задержки ЛЗ на временной сдвиг τ_n , при котором помеха не коррелирована. Дисперсия же оценки на выходе фильтра реализуется обычной схемой, включающей квадратор и интегратор. Сигнал рассогласования между σ_m^2 и $\sigma_{m^*}^2$ меняет по-

стоянную времени фильтра изменением его сопротивления или емкости, сводя к минимальному значению эту ошибку рассогласования.

Поскольку дисперсия оценки $m^*(t)$ после сглаживания широкополосного сигнала фильтром с импульсной функцией (2) монотонно зависит от постоянной времени, значение последней, определяемое условием

$$\sigma_m^2 = \sigma_{m^*}^2 = \alpha^2 \iint_0^\infty [R_m(\tau - \theta) + R_n(\tau - \theta)] e^{-\alpha(\tau + \theta)} d\tau d\theta, \quad (10)$$

единственно. Сравним это значение с оптимальным [см. (8)] для воз- действий с корреляционными функциями

$$R_m(\tau) = \sigma_m^2 e^{-\beta|\tau|}, \quad R_n(\tau) = c^2 \delta(\tau). \quad (11)$$

Из (10) следует

$$\alpha = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + 2\beta\gamma^2}. \quad (12)$$

На рис. 2 представлена зависимость оптимального значения α^* (сплошные линии) из (8) и значения α (штриховые линии), определяемые соотношением (12), от параметров сигнала и помехи. Как видим, эти соотношения в широком диапазоне изменения параметров отличаются несущественно и практически обеспечивают совпадающие результаты по дисперсии ошибок (рис. 3). Аналогичная ситуация наблюдается, если исходные корреляционные функции отличны от (11).

Описываемая структурная схема обеспечивает качественную фильтрацию, если полезный сигнал является достаточно гладкой временной функцией. Однако в реальных условиях возможно резкое изменение сигнала, свидетельствующее о локальных выбросах контролируемого параметра, нарушении стационарности процесса. Если память фильтра была велика, то такие выбросы сигнала могут задерживаться и полез-

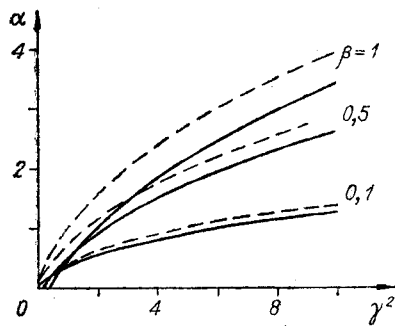


Рис. 2.

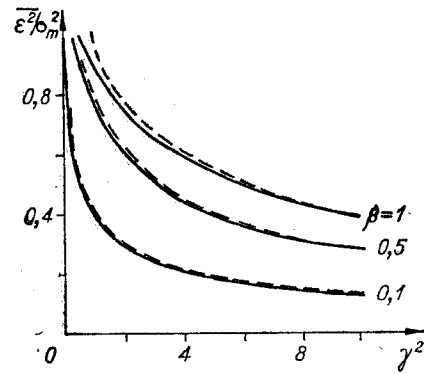


Рис. 3.

ная информация будет теряться. Если использовать фильтр с широкой полосой пропускания, то качество фильтрации будет низким. Очевидно, чтобы обеспечить в этой ситуации воспроизведение сигнала с минимальной ошибкой, необходимо фиксировать момент изменения характера процесса и изменять свойства фильтра, его импульсную функцию. На структурной схеме рис. 1 эти операции реализуются двумя нижними каналами, в одном из которых фиксируется момент превышения помехой $n^*(t)$ некоторого порогового уровня, в другом — оценивается дисперсия σ_n^2 , значение которой и определяет уровень срабатывания порогового устройства (ПУ). Последний задается средней частотой выбросов помехи в единицу времени.

Таким образом, память фильтра, его постоянная времени $T=RC$, управляется двумя параметрами: дисперсией оценки полезного сигнала σ_m^2 на выходе фильтра и уровнем $n^*(t)$. Характер воздействия дисперсии σ_m^2 на память фильтра был рассмотрен ранее, теперь необходимо оценить динамику фильтра при наличии выбросов сигнала $n^*(t)$ за установленный уровень. Превышение сигнала за установленный уровень может возникать либо за счет помехи, либо при резких изменениях полезного сигнала. В последнем случае необходимо так фильтровать

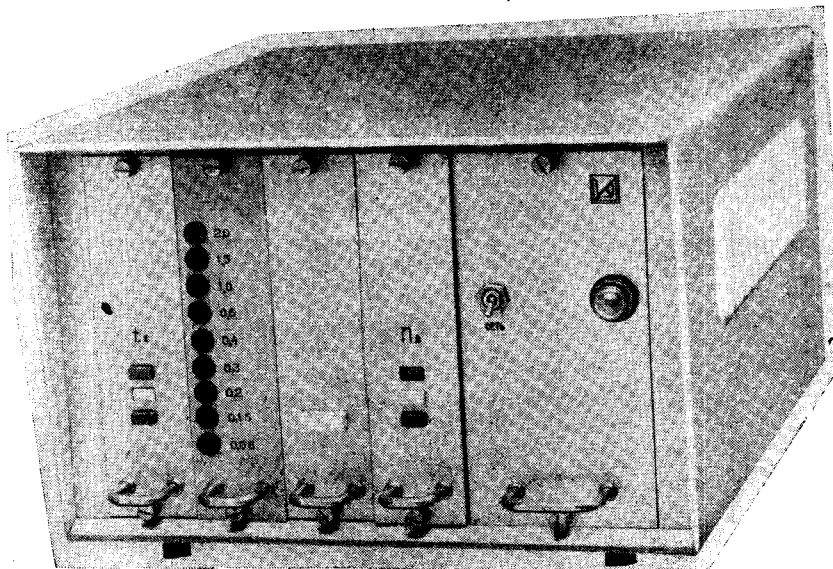
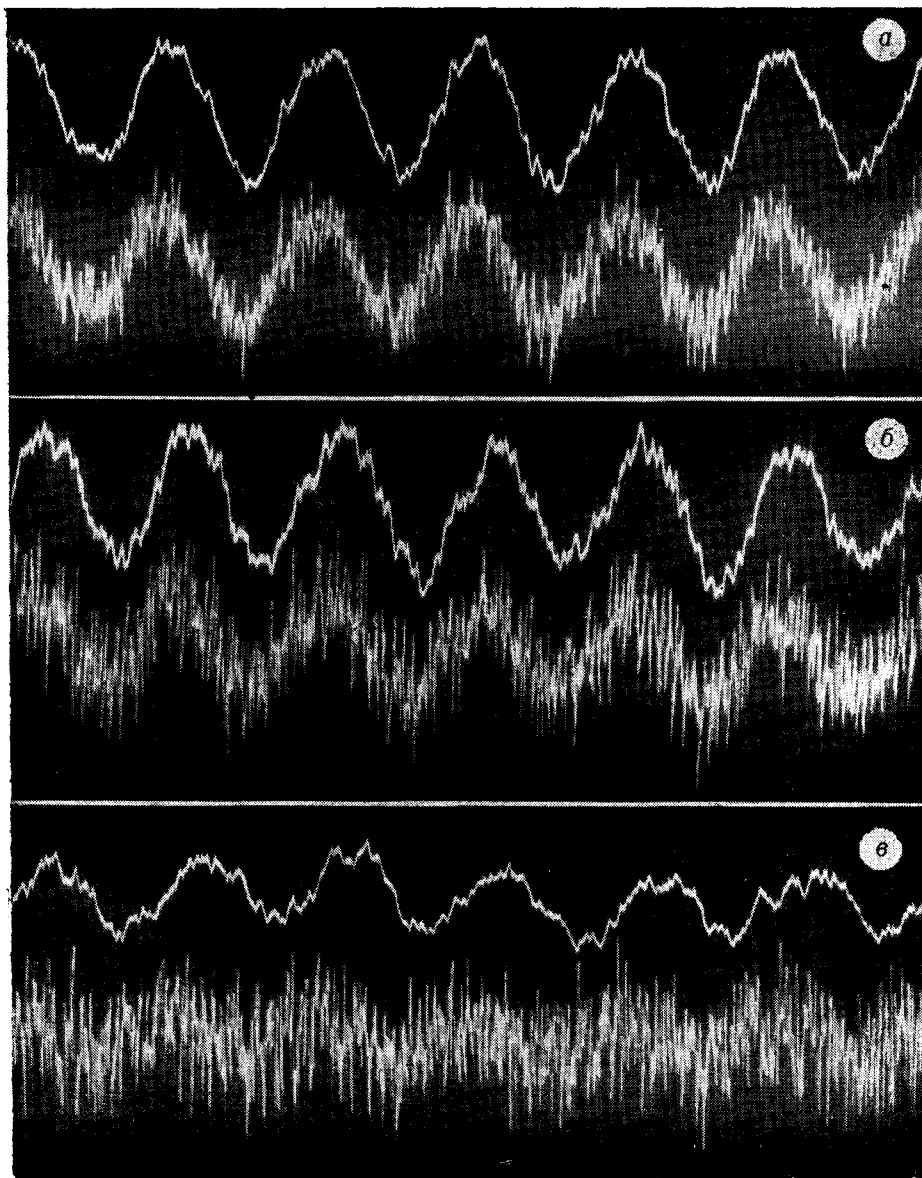
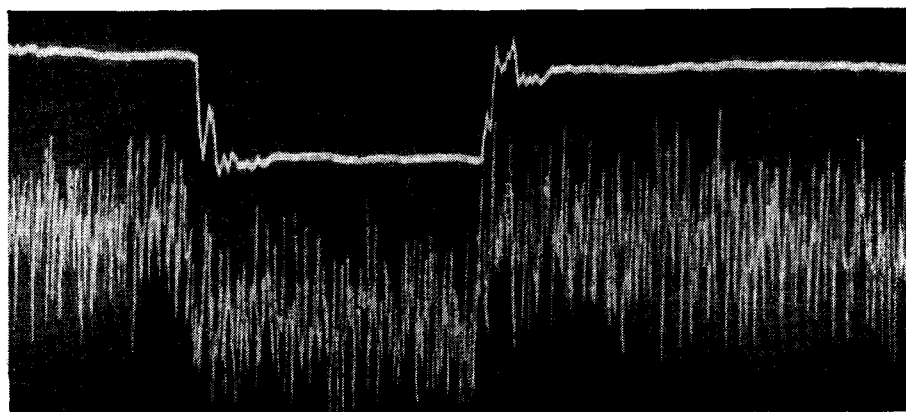


Рис. 4.



Puc. 5.



Puc. 6.

сигнал, чтобы минимизировать дисперсию ошибки и сохранить точность воспроизведения сигнала, например несмещенность оценки. Этим требованиям можно удовлетворить, если располагать априорной информацией о форме выбросов. К сожалению, характер этих выбросов достаточно разнообразен и обусловлен, например, как в γ -дефектоскопии, видом дефекта. Поэтому можно ограничиться типовым возмущением, например, в виде единичного скачка $1(t)$ и оптимизировать импульсную функцию $k(t, \tau)$ на это возмущение.

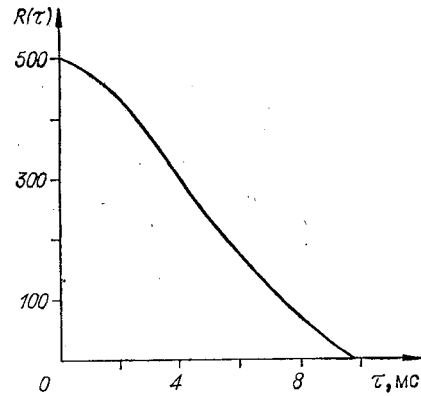


Рис. 7.

Используя вариационные приемы, нетрудно показать, что оптимальное воспроизведение сигнала в виде единичного воздействия на фоне «белого» шума обеспечивает фильтр с переменными параметрами, импульсная функция которого

$$k(t, \tau) = \frac{1(\tau)}{t}; \quad t \geq \tau. \quad (13)$$

Очевидно, такой фильтр дает несмещенность оценки рассматриваемого воздействия в любой момент времени.

Практическая реализация фильтра (13), являющегося интегратором с переменной памятью, достаточно сложна, поэтому оценим характер зависимости $T(t)$ — постоянной времени RC -фильтра, чтобы приблизить его импульсную функцию к (13).

Импульсная функция RC -фильтра с переменными параметрами [5]

$$k(t, \tau) = \frac{1}{R(\tau)C(\tau)} \exp\left(-\int_{\tau}^t \frac{RC+1}{RC} d\mu\right); \quad t \geq \tau. \quad (14)$$

Если ограничиться лишь изменением сопротивления $R(t)$ (это существенно упрощает реализацию), тогда

$$k(t, \tau) = \frac{1}{CR(\tau)} \exp\left(-\frac{1}{C} \int_{\tau}^t \frac{d\mu}{R(\mu)}\right); \quad t \geq \tau. \quad (15)$$

Пусть закон изменения сопротивления

$$R(t) = R_{\max}(1 - e^{-t}). \quad (16)$$

При этом для $T_{\max} = 1$ и достаточно малых значений $t = \tau$, для которых импульсная функция (13) существенно больше нуля, очевидно, что импульсная функция (15) совпадает с оптимальной.

На основе описанного подхода разработан адаптивный RC -фильтр (рис. 4), постоянная времени которого может меняться в зависимости от характера процесса в пределах от 0,02 до 2,0 с. Для иллюстрации на рис. 5, a — b представлены осциллограммы входного и сглаженного синусоидального сигналов ($f = 0,5$ Гц) при разных отношениях сигнал/шум, позволяющие качественно оценить возможности адаптивного фильтра ($a - \gamma^2 = 10$; $b - \gamma^2 = 1$; $c - \gamma^2 = 0,1$). Рис. 6 отражает фильтрацию единичного воздействия. В качестве источника шума использовался низкочастотный шумовой генератор ГШ-1, корреляционная функция его сигнала представлена на рис. 7.

На эффективное сглаживание сигнала можно рассчитывать, если выполняется условие (9) и отношение сигнал/шум достаточно большое. Иных априорных данных для синтеза предлагаемого фильтра не требуется, а его сравнительная простота позволяет практически реализовать адаптивную фильтрацию. Описываемый фильтр успешно используется в настоящее время для радиоактивных методов контроля.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
2. А. А. Фельдбаум. Вычислительные устройства в автоматике. М., Физматгиз, 1959.
3. Я. З. Цыпкин. Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.
4. А. Г. Сенин. К задаче фильтрации сигнала.— Автоматика и телемеханика, 1967, № 11.
5. Основы автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева. М., Физматгиз., 1963.

Поступила в редакцию 26 июня 1973 г.

УДК 621.391

В. В. ВОЛГИН, И. А. САКОВ

(Москва)

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ НА КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ, РАССЧИТАННЫЕ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Введение. При статистических измерениях, так же как и при других измерениях, возникает задача метрологического обеспечения, куда входит определение и нормирование погрешностей измерения вероятностных характеристик по экспериментальным данным. Аппроксимация полученной экспериментально-вероятностной характеристики какой-нибудь аналитической моделью без оценки точности может привести к существенным ошибкам, особенно при не очень большом объеме экспериментальных данных.

Во многих ситуациях случайные процессы в промышленных системах управления можно считать стационарными и эргодическими. Для таких процессов рассмотрим вопросы определения точности одной из важнейших вероятностных характеристик случайных процессов — корреляционной функции.

Погрешности измерения корреляционных функций обычно делят на методические и инструментальные. Ограничимся рассмотрением методических погрешностей.

Постановка задачи. Существует довольно много работ, посвященных исследованию погрешностей оценок корреляционных функций в зависимости от длины реализации T . Однако, как правило, во всех этих исследованиях определяется лишь простейшая характеристика закона распределения оценки корреляционной функции $R^*(\tau, T)$ — дисперсия. Хотя дисперсия при $T \rightarrow \infty$ стремится к нулю, ее величина не может дать количественных оценок точности $R^*(\tau, T)$.

Доверительные интервалы дают возможность математически обоснованно выбрать модель корреляционной функции, ее параметры, оценить точность измерения $R(\tau)$ при заданном объеме экспериментальных данных. Кроме того, они позволяют с известной точностью и надежностью определить дисперсию и интервал корреляции случайного процесса, построить доверительные интервалы на спектральную плотность процесса [1]. Для построения доверительных интервалов необходимо знать закон распределения оценки.

Закон распределения оценки $R^*(\tau, T)$ сложным образом зависит от закона распределения случайного процесса, метода вычисления оценки, модели корреляционной функции, от оценки математического ожи-