УДК 62-502.12

А. М. ХАСКИН

(Ленинград)

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Непрерывный случай. Если весовая функция линейного стационарного звена известна, то выходной сигнал $m(t)$ определяется как

$$m(t)=\int_0^\infty h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau,\ -\infty\leqslant t\leqslant\infty, \tag{1}$$

где $x(t)$ — входной сигнал. Мы будем предполагать, что $x(t)$ является случайным стационарным процессом с нулевым математическим ожиданием и известной спектральной плотностью $S^x(\omega)$.

В реальных условиях весовая функция звена всегда определяется с некоторой погрешностью $\Delta h(t)$. В этом случае ошибку прогнозирования можно записать как

$$\Delta(t)=\int_0^\infty \Delta h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau,\ -\infty\leqslant t\leqslant\infty. \tag{2}$$

Таким образом, погрешность прогнозирования зависит от ошибки идентификации, которая, в свою очередь, обусловлена способом идентификации звена.

Весовая функция линейного стационарного звена может быть определена из решения интегрального уравнения

$$\int_0^\infty h(\tau)\,R^k(t-\tau)\,d\tau=R^{kz}(t),\ -\infty\leqslant t\leqslant\infty,$$

где $R^k(t)$ — автокорреляционная функция входного тестового сигнала; $R^{kz}(t)$ — взаимная корреляционная функция тестового сигнала и реакции $z(t)$ звена на тестовый сигнал $k(t)$.

Необходимым условием физической осуществимости звена является

$$h(\tau)=0 \text{ при } \tau<0. \tag{3}$$

Эксперименту по идентификации сопутствуют следующие обстоятельства.

1. На выходе измеряется сигнал

$$y(t)=z(t)+f(t), \tag{4}$$

где $f(t)$ — случайная помеха при измерении сигнала $z(t)$. Положим, что $f(t)$ является стационарным эргодическим нормальным процессом с известными статистическими характеристиками.

2. Входной и выходной сигналы звена измеряются на конечных интервалах времени $\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$.

Так как предполагается активный эксперимент по идентификации, т. е. с использованием тестовых сигналов, при котором обычно удается с достаточной точностью сформировать тестовый сигнал, то положим $\delta k(t)=0$. Кроме того, можно показать, что погрешность идентификации весовой функции звена в значительно меньшей степени зависит от ошибки $\delta k(t)$, чем от погрешности $f(t)$ измерения выходного сигнала.

Помеха $f(t)$ обусловливает погрешность идентификации $\Delta h = \tilde{h} - h$, где $\tilde{h}$ — приближение к весовой функции, полученное путем решения уравнения

$$\int_0^\infty \tilde{h}(\tau) C^k(t-\tau)\,d\tau = C^{ky}(t),\ -\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}, \tag{5}$$

где $C^k(t)$, $C^{ky}(t)$ — выборочные корреляционные функции, полученные по реализациям сигналов $k(t)$, $y(t)$, $-\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}$.

Заметим, что приближение $\tilde{h}$ не удовлетворяет, вообще говоря, условию (3). С учетом сказанного получим следующее выражение для $\tilde{h}(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau) C^k(t-\tau)\,d\tau = C^{ky}(t),\ -\frac{T}{2} \leqslant t \geqslant \frac{T}{2}. \tag{6}$$

В частотной области уравнение (6) может быть записано как

$$\tilde{h}(j\omega) = \frac{C^{ky}(\omega)}{C^k(\omega)} = \frac{C^{kz}(\omega) + C^{kf}(\omega)}{C^k(\omega)}, \tag{7}$$

где $C^{kz}(\omega)$, $C^{kf}(\omega)$, $C^k(\omega)$ — выборочные спектральные плотности. Для ошибки определения весовой функции имеем

$$|\Delta h(j\omega)|^2 = \left|\frac{S^{kz}(\omega)}{S^k(\omega)} - \frac{C^{kz}(\omega) + C^{kf}(\omega)}{C^k(\omega)}\right|^2. \tag{8}$$

Функции $\Delta h(t)$ являются реализациями случайного процесса, конкретный вид которых зависит от реализаций помехи $f(t)$, $-\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}$. Выборочная дисперсия ошибки прогнозирования выходного сигнала тогда может быть представлена

$$I(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta h(i\omega)|^2 S^x(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{S^{kz}(\omega)}{S^k(\omega)} - \frac{C^{kz}(\omega) + C^{kf}(\omega)}{C^k(\omega)}\right)^2 S^x(\omega)\,d\omega. \tag{9}$$

Можно показать [1], что функционал (9) является несмещенной оценкой дисперсии ошибки Δ прогнозирования

$$\bar{I}(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^f(\omega)}{S^k(\omega)} S^x(\omega)\,d\omega. \tag{10}$$

Из (10) следует, что в случае выбора в качестве тестового сигнала функции, не коррелированной с помехой $f(t)$, будем иметь величину $\bar{I}(\Delta) = 0$. Дисперсия оценки $I(\Delta)$ будет равна

$$D[I(\Delta)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{cov}(C^{fk}(\omega_1)\,C^{fk}(\omega_2))}{C^k(\omega_1)\,C^k(\omega_2)} S^x(\omega_1)\,S^x(\omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2. \tag{11}$$

В [2] показано, что для достаточно больших интервалов времени $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ выражение (11) может быть записано в виде

$$D[I(\Delta)] = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{S^f(\omega)\ S^x(\omega)}{S^k(\omega)}\right]^2 d\omega. \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что оценка (9) состоятельная, так как $D[I(\Delta)] \to 0$ при $T \to \infty$.

Предположим, что свойства помехи $f(t)$ таковы, что существует физически реализуемый класс тестовых сигналов, обеспечивающий выполнение условия

$$D[I(\Delta)] < \infty. \tag{13}$$

Пусть $S^f(\omega)$, $S^k(\omega)$, $S^x(\omega)$ — дробно-рациональные функции, разность между степенями знаменателя и числителя которых соответственно равны $2n$, $2m$, $2d$. Тогда условие (13) будет выполнено, если

$$m < n + 2d. \tag{14}$$

Отметим, что условие (14) обычно выполняется. Тогда целесообразно выбрать такой тестовый сигнал, который обеспечивает минимальное значение погрешности прогнозирования выходного сигнала по входному сигналу $x(t)$, имеющему спектральную плотность $S^x(\omega)$.

В реальных условиях на тестовые сигналы наложены ограничения. Например, на амплитуду, на «мощность» и т. д. Рассмотрим здесь ограничения на величину дисперсии тестового сигнала

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^k(\omega)\, d\omega \leqslant R. \tag{15}$$

Таким образом, мы будем решать изопериметрическую задачу определения минимума функционала (10) при ограничении (15). Решение можно записать так:

$$\sqrt{\frac{S^x(\omega) S^f(\omega)}{\lambda}}, \tag{16}$$

где

$$\lambda = \left\{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S^x(\omega)\, S^f(\omega)}\, d\omega}{R}\right\}^2. \tag{17}$$

Величина критерия качества при оптимальном тестовом сигнале равна

$$\bar{I}(\Delta) = \frac{1}{R}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S^f(\omega)}\, S^x(\omega)\, d\omega\right]^2. \tag{18}$$

Следует отметить, что задача идентификации при тестовом сигнале (16) может оказаться некорректной.

Действительно, определим критерий качества решения задачи идентификации весовой функции как

$$\Phi(\Delta h) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta h^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta h(j\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{S^{kz}(\omega)}{S^k(\omega)} - \frac{C^{kz}(\omega) + C^{kf}(\omega)}{C^k(\omega)}\right)^2 d\omega. \tag{19}$$

Как и $I(\Delta)$, функционал $\Phi(\Delta h)$ является случайной величиной с ненулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D[\Phi(\Delta h)] = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{S^f(\omega)}{S^k(\omega)}\right|^2 d\omega. \tag{20}$$

Таким образом, при тестовом сигнале (16) величина

$$D[\Phi(\Delta h)] = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^f(\omega)\, \lambda}{S^x(\omega)}\, d\omega \tag{21}$$

может оказаться сколь угодно большой независимо от выполнения условия (13). Этот результат для частных случаев помехи тестового и прогнозируемого сигналов был получен в работе [3]. Пусть, например, $f(t)$ — «белый шум» со спектральной плотностью $S^f(\omega) = 1$. Входной сигнал $x(t)$ имеет спектральную плотность

$$S^x(\omega) = \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

Тогда спектр мощности Фурье оптимального тестового сигнала определяется как

$$S^k(\omega) = \frac{2\alpha R}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

При тестовом сигнале

$$D[\Phi(\Delta h)] = \frac{1}{2TR\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega^2 + \alpha^2)\, d\omega = \infty.$$

Дискретный случай. При численном решении задач идентификации используют дискретный аналог уравнения (6)

$$C_i^{ky} = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_n C_{i-n}^k, \quad i \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right], \tag{22}$$

где $C_i^{ky} = C^{ky}(i\Delta t)$; $\tilde{h}_i = \tilde{h}(i\Delta t)$; $C^k{}_{i-n} = C^k[(i-n)\Delta t]$; Δt — шаг дискретизации.

Присутствие помехи при измерении выходного сигнала обусловливает погрешность идентификации $\Delta h_i = \tilde{h}_i - h_i$.

Погрешность прогнозирования случайной стационарной последовательности $m_i = m(i\Delta t)$ при спектральной плотности входного сигнала $\tilde{S}^x(\lambda)$ будет равна

$$\Delta_i = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta h_n x_{i-n}, \quad i \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right]. \tag{23}$$

Обозначим

$$\Delta h(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta h_n e^{-\lambda n}. \tag{24}$$

Дискретный аналог функционала (9)

$$I^*(\Delta) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\tilde{S}^{kz}(\lambda)}{\tilde{S}^k(\lambda)} - \frac{\tilde{C}^{kz}(\lambda) + \tilde{C}^{kf}(\lambda)}{\tilde{C}^k(\lambda)} \right)^2 \tilde{S}^x(\lambda)\, d\lambda, \tag{25}$$

где $\tilde{S}^x(\lambda)$, $\tilde{S}^k(\lambda)$ — спектральные плотности случайных решетчатых процессов x_i, k_i, $i \in [-\infty, \infty]$; $C^k(\lambda)$, $C^{kf}(\lambda)$, $C^{kz}(\lambda)$ — выборочные спектральные плотности соответствующих решетчатых процессов.

Выборочная дисперсия (25), как и для непрерывного случая, является несмещенной оценкой дисперсии ошибки прогнозирования последовательности m_k, $k = -\infty \div \infty$. Дисперсия этой оценки

$$D[I^*(\Delta)] = \frac{1}{N\Delta t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\tilde{S}^f(\lambda)\, \tilde{S}^x(\lambda)}{\tilde{S}^k(\lambda)} \right]^2 d\lambda. \tag{26}$$

Отсюда сразу видно, что условию $D[I(\Delta)] < \infty$ удовлетворить значительно проще, чем условию (13), так как интеграл в (26) имеет конечные пределы. Допустимыми являются все сигналы $\{k_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, для которых $\tilde{S}^\Delta(\lambda)$ не имеет нулей порядка выше, чем $1/2 - \varepsilon\, (\varepsilon > 0)$ при $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Класс таких тестовых сигналов значительно шире, чем класс тестовых сигналов, удовлетворяющих (14) при заданных n и d в (14).

Решая задачу минимизации функционала (26) при ограничении на тестовый сигнал

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}^k(\lambda)\, d\lambda \leqslant R,$$

получаем

$$\tilde{S}^k(\lambda) = \sqrt{\frac{\tilde{S}^x(\lambda) \tilde{S}^f(\lambda)}{\Omega}}, \tag{27}$$

где

$$I^*(\Delta)=\frac{1}{RN\Delta t^2}\left[\int_{-\pi} V\, S'(\lambda)\, S^{\sim}(\lambda)^{\circ}\, d\lambda\right].$$

Отметим, что для рассматриваемого нами случая задания помехи f_k и процесса x_k, $k=-\infty\div\infty$, корректной оказывается и задача идентификации звена при выбранном тестовом сигнале (27). Величина, аналогичная (21), в дискретном случае может быть представлена

$$D[\Phi^*(\Delta h)]=\frac{1}{N(\Delta t)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\widetilde{S}^f(\lambda)\,\Omega}{\widetilde{S}^x(\lambda)}<\infty.$$

Таким образом, нами получены для непрерывного и дискретного случаев оптимальные тестовые сигналы, позволяющие определить весовую функцию звена так, чтобы дисперсия погрешности прогнозирования случайного стационарного процесса была минимальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Ибрагимов. Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса.— Теория вероятности и ее применения, 1963, т. VIII, вып. 4.
2. Г. Дженкинс, Д. Ваттс. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1 и 2. М., «Мир», 1971.
3. И. И. Перельман. Точность восстановления импульсной характеристики по данным нормальной эксплуатации объекта.— Труды I Всесоюзного симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике. М., «Наука», 1970.

Поступила в редакцию 25 июля 1972 г.

УДК 621.391 : 62-50

Б. Д. БОРИСОВ, М. И. МОГИЛЬНИЦКИЙ,
А. Г. СЕНИН, М. С. ХАЙРЕТДИНОВ

(Новосибирск)

АДАПТИВНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ СИГНАЛА

В измерительной практике для уменьшения влияния помех и повышения точности измерения часто используют сглаживание сигнала.

При известных корреляционных функциях сигнала $R_m(\tau)$ и помехи $R_n(\tau)$ оптимальная фильтрация обеспечивается фильтром с импульсной функцией $k(\tau)$, определяемой из уравнения [1]

$$R_m(\tau)=\int_0^{\infty}[R_m(\tau-\theta)+R_n(\tau-\theta)]\,k(\theta)\,d\theta,\ \tau\geqslant 0. \qquad (1)$$

Очевидно, если меняются статистические свойства сигналов, необходимо также менять импульсную функцию фильтра. В этих условиях синтезировать оптимальный фильтр затруднительно, поэтому целесообразно использовать такие обучающиеся сглаживающие устройства, свойства которых меняются за счет изменения его параметров [2, 3].