11. А. Брайсон, Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
12. В. В. Федоров. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). М., «Наука», 1971.
13. Э. Беккенбах, Р. Беллман. Неравенства. М., «Мир», 1965.
14. В. Ф. Демьянов. К решению целочисленных задач выпуклого программирования.— В сб. «Оптимальные системы автоматического управления». М., «Наука», 1967.
15. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953.

Поступила в редакцию 10 сентября 1973 г.

УДК 681.2.082/083.519.2

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ, Я. Я. ТОМСОНС
(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ НЕТОЧНО ЗАДАННОМ ОПЕРАТОРЕ

В [1] решалась задача восстановления оценок спектральной плотности (СП) входного сигнала измерительной системы, описываемой уравнением

$$\int_{-\infty}^{t} k(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau + n(t) = y(t) + n(t) = z(t). \tag{1}$$

Здесь $k(t)$ — импульсная функция системы; $x(\tau)$, $y(t)$ — случайные стационарные процессы со спектральными плотностями $\Gamma_{xx}(\omega)$, $\Gamma_{yy}(\omega)$; $z(t)$ — регистрируемый выходной сигнал, искаженный стационарной случайной помехой $n(t)$, выборочная функция которой доступна (до или после проведения эксперимента) для определения статистических характеристик при допущении, что $k(t)$ известна точно. Были получены оптимальные и квазиоптимальные оценки восстановленной СП и их характеристики с использованием методов регуляризации.

В данной работе такой подход распространяется на случай, когда оператор системы $A(\omega) = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau\right|^2$ известен с ошибкой: $A_h(\omega) = A(\omega) + h(\omega)$, где $h(\omega)$ — случайная величина с $M[h(\omega)] = \mu(\omega)$, $\mathrm{Var}[h(\omega)] = \sigma_h^2(\omega)$. Оправданием такого рассмотрения является тот факт, что $A(\omega)$ часто получается из экспериментальных (тарировочных) данных или меняется вследствие возмущения окружающей среды.

Как и в [1], допускается, что $\Gamma_{ny}(\omega) = 0$; выборочная СП $C_{zz}(\omega)$, определенная по реализации $z(t)$ $(t \in [0, T])$, имеет [1, 2] $M[C_{zz}(\omega)] \simeq \Gamma_{zz}(\omega)$; $\mathrm{Var}[C_{zz}(\omega)] \simeq \psi_{zz}\Gamma_{zz}^2(\omega)$ и приближенно подчиняется распределению $a_z\chi^2_{\nu_z}$ с $\nu_z = 2/\psi_{zz}$ степенями свободы (a_z — постоянная величина; $\chi^2_{\nu_z}$ — χ^2 — распределение); $\omega \in \Omega_1 = \{\omega\colon A_h(\omega) \neq 0\}$.

Вводится регуляризованная оценка

$$C_{xx}^{\alpha_h} = \frac{A_h(\omega)\,C_{zz}(\omega)}{A_h^2(\omega) + \alpha(\omega)}. \tag{2}$$

Параметр регуляризации $\alpha(\omega)$ отыскивается из условия минимума среднеквадратической ошибки (СКО) восстановления

$$\varepsilon_\alpha(\omega) = C_{xx}^{\alpha_h}(\omega) - \Gamma_{xx}(\omega).$$

Если построение оптимальных оценок невозможно, то находим наилучшие регуляризованные оценки для определенной совокупности входных данных:

$$\{C_{zz}(\omega),\ \theta(\omega),\ A_h(\omega)\},\ \{C_{zz}(\omega),\ C_{nn}(\omega),\ A_h(\omega)\}.$$

Заметим, что оценки для СП входного сигнала строятся при фиксированном значении $\omega=\omega_i\in\Omega_1$, $i=1, 2, \ldots, n$; при этом $A_h(\omega)$, $C_{zz}(\omega)$, $C_{nn}(\omega)$ становятся числами, а параметр ω для краткости записи будет опускаться.

Сначала рассмотрим случай $\mu=0$. Введем обозначения:

$$L=A^2;\ L_h=A_h^2=L+l_h;\quad l_h=2Ah+h^2.$$

Тогда

$$\varepsilon_\alpha=\frac{L(\Gamma_{nn}+\Gamma_{zz})-\alpha\Gamma_{yy}+AhC_{zz}-l_h\Gamma_{yy}}{A[L_h+\alpha]}. \tag{3}$$

Ряд $\frac{1}{L_h+\alpha}=\sum_{i=0}^{\infty}a_i l_h^i$ с коэффициентами разложения $a_i=\frac{(-1)^i}{(L+\alpha)^{i+1}}$ является знакочередующимся, и для его сходимости необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} a_n l_h^n=0$.. При $\alpha=0$ ряд сходится в интервале значений $\psi_{AA}=\sigma_h^2/A \in[0,\ 0{,}08]$ и расширяется при $\alpha>0$. Подставляя первые три члена упомянутого ряда в (3), возведя в квадрат и осуществив осреднение, получаем выражение для СКО, в котором в явном виде присутствует параметр α. Пренебрегая малыми по величине (на порядок и более) членами, минимизируя по α, получаем

$$\alpha_h=L[\theta+\psi_{zz}(1+\theta)+\psi_{AA}(1+\theta)(1+\psi_{zz})];\quad \theta=\frac{\Gamma_{nn}}{\Gamma_{yy}}. \tag{4}$$

Оценка (2) с таким параметром регуляризации является оптимальной при неточно заданном операторе с СКО восстановления

$$\overline{\varepsilon^2_{\alpha_h}}=\mathrm{M}\left[\varepsilon^2_\alpha|_{\alpha=\alpha_h}\right]\simeq\varphi_{xx}^{\alpha_h}\Gamma^2_{xx},$$

где

$$\varphi_{xx}^{\alpha_h}=\frac{\psi_{zz}+\psi_{AA}(1+\psi_{zz})}{(1+\psi_{zz})(1+\psi_{AA})}\left[1+4\frac{\psi_{AA}/(1+\theta)-\psi_{AA}}{(1+\theta)(1+\psi_{zz})(1+\psi_{AA})}\right],$$

но практически нереализуема (так как требует знания A).

Для ее реализации выберем параметр регуляризации в виде

$$\alpha_{0h}=L_h[\theta+\psi_{zz}(1+\theta)+\psi_{AA}(1+\theta)\ (1+\psi_{zz})],$$

что приводит к оценке

$$C_{xx}^{\alpha_{oh}}=\frac{C_{zz}}{A_h(1+\theta)(1+\psi_{zz})(1+\psi_{AA})} \tag{5}$$

с входными данными $\{C_{zz},\ \theta,\ A_h\}$.

Для определения СКО этой оценки используется ряд $\frac{1}{A_h}=\sum_{i=0}^{\infty}\times$ $\times(-1)^i h^i/A^{i+1}$, сходящийся в интервале $\psi_{AA}\in[0,\ 0{,}25]$, с погрешностью аппроксимации первыми тремя членами для $\psi_{AA}\in[0,\ 0{,}06]$ не более 6%. СКО оценки (5) определяется как

$$\overline{\varepsilon^2_{\alpha_{oh}}}=\mathrm{M}\left[\varepsilon^2_\alpha|_{\alpha=\alpha_{oh}}\right]\simeq\varphi_{xx}^{\alpha_{oh}}\Gamma^2_{xx}, \tag{6}$$

где

$$\varphi_{xx}^{\alpha_{oh}}=\frac{\psi_{zz}+\psi_{AA}(1+8\psi_{AA})}{(1+\psi_{zz})(1+\psi_{AA})}. \tag{7}$$

Легко заметить, что, так же как и в случае оптимальной оценки при точно заданном операторе [1], СКО оценки $C_{xx}^{\alpha_{oh}}$ не зависит от θ и при $\psi_{AA}\to 0 \lim \varphi_{xx}^{\alpha_{oh}} = \varphi_{xx}^{\alpha_o} = \frac{\psi_{zz}}{1+\psi_{zz}}$; кроме того,

$$M\left[C_{xx}^{\alpha_{oh}}\right] \simeq \frac{\Gamma_{xx}}{1+\psi_{zz}}; \quad \mathrm{Var}\left[C_{xx}^{\alpha_{oh}}\right] \simeq \Gamma_{xx}^2\left[\varphi_{xx}^{\alpha_{oh}} - \left(\frac{\psi_{zz}}{1+\psi_{zz}}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Когда параметр θ точно не известен, целесообразно использовать величину $\hat{\theta} = C_{nn}/(C_{zz} - C_{nn})$ [1]. Тогда, определив параметр регуляризации в виде $\alpha_{kh} = L_h\left[\hat{\theta} + \psi_{zz}(1+\hat{\theta}) + \psi_{AA}(1+\hat{\theta})(1+\psi_{zz})\right]$, приходим к оценке

$$C_{xx}^{\alpha_{kh}} = \frac{C_{zz}}{A_h(1+\hat{\theta})(1+\psi_{zz})(1+\psi_{AA})}, \tag{9}$$

существующей с вероятностью γ для всех $\theta\in[0, \theta_{\text{пр}}]$ [1] с СКО восстановления

$$\overline{\varepsilon_{\alpha_{kh}}^2} = M_{\hat{\theta}}\left[M\left[\varepsilon_\alpha^2|_{\alpha=\alpha_{kh}}\right]\right] \simeq \varphi_{xx}^{\alpha_{kh}}\Gamma_{xx}^2, \tag{10}$$

где

$$\varphi_{xx}^{\alpha_{kh}} = \frac{B}{1+B}, \quad B = \psi_{zz}(1+\theta)^2 + \psi_{nn}\theta^2 + \psi_{AA}(1+9\psi_{AA}). \tag{11}$$

По результатам испытаний статистических гипотез для различных ψ_{zz}, ψ_{nn}, ψ_{AA}, θ (при допущении нормальности распределения h) была принята гипотеза о нормальном распределении оценки $C_{xx}^{\alpha_k}$, т. е. $C_{xx}^{\alpha_{kh}} \sim N(M, \mathrm{Var})$, с

$$M\left[C_{xx}^{\alpha_{kh}}\right] \simeq \frac{\Gamma_{xx}}{1+\psi_{zz}}; \quad \mathrm{Var}\left[C_{xx}^{\alpha_{kh}}\right] \simeq \Gamma_{xx}^2\left[\varphi_{xx}^{\alpha_{kh}} - \left(\frac{\psi_{zz}}{1+\psi_{zz}}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Введем величину $D_k = \mathrm{Var}\left[C_{xx}^{\alpha_{kh}}\right] \Big/ \Gamma_{xx}^2$. Тогда $C_{xx}^{\alpha_{kh}} \big/ \Gamma_{xx}$ будет распределена как $N\left(\frac{1}{1+\psi_{zz}}, D_k\right)$ с вероятностными границами

$$P\left\{n_k(a/2) < C_{xx}^{\alpha_{kh}} \big/ \Gamma_{xx} \leqslant n_k(1-a/2)\right\} = 1-a,$$

где $n_k(a/2)$ — $a/2$ — квантиль распределения $N\left(\frac{1}{1+\psi_{zz}}, D_k\right)$, а интервал

$$I_k(a) = \left(\frac{C_{xx}^{\alpha_{kh}}}{n_k(1-a/2)}, \frac{C_{xx}^{\alpha_{kh}}}{n_k(a/2)}\right) \tag{13}$$

является $(1-a)$-доверительным интервалом для Γ_{xx}. Идентичный доверительный интервал можно построить и для оценки $C_{xx}^{\alpha_{oh}}$. Для ответа на вопрос, является ли $C_{xx}^{\alpha_{kh}}$ наилучшей в классе регуляризованных оценок (2) для входных данных $\{C_{zz}, C_{nn}, A_h\}$, было проведено статистическое моделирование процедуры построения оценок $C_{xx}^{\alpha_{ih}}$ с параметрами регуляризации $\alpha_{ih} = (1\pm\Delta i)\alpha_{kh}(i=0, 1, \ldots, 15)$. По результатам построены экспериментальные значения СКО восстановления $\left(\text{т. е.} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{\alpha_{ih}}^2(j)\right)$ этих оценок (объем выборки $N=1000$). Было замечено, что иногда возможно построить оценку, имеющую СКО меньше, чем СКО восстановления оценки $C_{xx}^{\alpha_{kh}}$, но разность СКО не превышала 4—6%, поэтому можно считать, что $C_{xx}^{\alpha_{kh}}$ — наилучшая оценка для входных данных $\{C_{zz}, C_{nn}, A_h\}$.

В случае $\mu \neq 0$ выбор параметров регуляризации в виде

$$\alpha_{oh} = L_h \left[\frac{\theta - \theta_A + \psi_{zz}(1+\theta) + \psi_{AA}(1+\theta)(1+\psi_{zz})}{1+\theta_A} \right];$$

$$\alpha_{kh} = L_h \left[\frac{\hat{\theta} - \theta_A + \psi_{zz}(1+\hat{\theta}) + \psi_{AA}(1+\theta)(1+\psi_{zz})}{1+\theta_A} \right],$$

где $\theta_A = \mu/A$, приводит к регуляризованным оценкам, характеристики восстановления которых определяются выражениями (6), (8), (10), (12), но вместо ψ_{AA} подставляется величина $\psi'_{AA} = \psi_{AA}/(1+\theta_A)^2$.

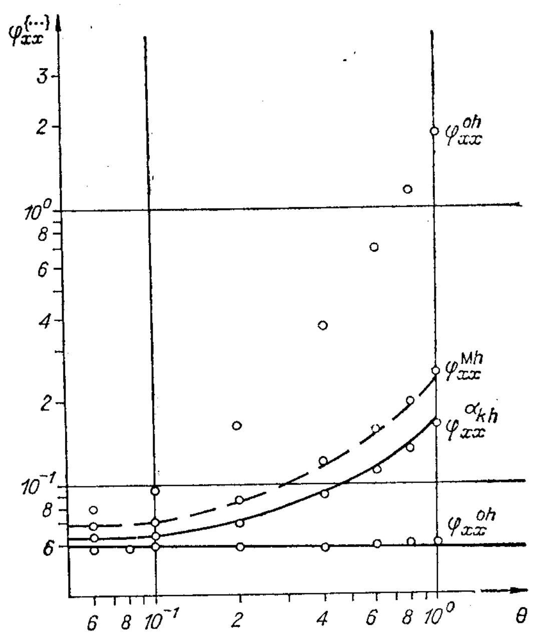
На рисунке приведены экспериментальные и расчетные значения величин $\varphi_{xx}^{\alpha_{oh}}$, $\varphi_{xx}^{\alpha_{kh}}$, а также

$$\varphi_{xx}^{Mh} = [\psi_{zz}(1+\theta)^2 + \psi_{nn}\theta^2](1+3\psi_{AA})^2 + \psi_{AA}(1+9\psi_{AA})$$

и φ_{xx}^{oh}, входящих в выражения СКО оценок

$$C_{xx}^{oh} = \frac{C_{zz}}{A_h} \text{ и } C_{xx}^{Mh} = \frac{C_{zz} - C_{nn}}{A_h}$$

при $\mu = 0$, $\nu_z = 50$, $\nu_n = 50$, $\psi_{AA} = 0{,}02$. Из рисунка видно, что регуляризованные оценки обладают наименьшей СКО восстановления. Выигрыш в точности оценки $C_{xx}^{\alpha_{kh}}$ по сравнению с C_{xx}^{Mh} может достигать 40—70% (при больших величинах ψ_{zz}, ψ_{AA}, θ). Проведенные исследования точности выражений (7), (8), (11), (12) показали, что разница между экспериментальными и расчетными значениями СКО не превышает 5—7% (это наблюдается при больших значениях величин ψ_{AA}, θ, при которых погрешность аппроксимации рассмотренных выше рядов первыми членами возрастает).



Выводы

Построение регуляризованных оценок является эффективным методом восстановления СП входного сигнала для многих практических случаев (учет шумовой составляющей, оператора системы и неточности его задания).

Форма полученных оценок и ошибок восстановления универсальна: пренебрежение каким-либо фактором приводит просто к исключению соответствующей величины в общих алгоритмах.

Полученные доверительные интервалы оценок позволяют решать задачи проверки статистических гипотез и сравнительного анализа для спектральной плотности входного сигнала измерительной системы физического эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Е. Воскобойников, Я. Я. Томсонс. Восстановление спектральной плотности.— Автометрия, 1973, № 4.
2. Г. Дженкинс, Д. Ваттс. Спектральный анализ и его приложения, т. I. М., «Мир», 1971.

Поступила в редакцию 8 февраля 1973 г.