гому существенно меняется, то другие методы (например, ММП) могут оказаться более эффективными.

Следует отметить еще одно обстоятельство. А именно, хотя решение (7) является строго несмещенной оценкой полинома (9), однако неточность в вычислении $\hat{F}(T, \tau)$ сказывается в появлении смещения, равного указанной погрешности. Следовательно, оценка $\hat{F}(T, \tau)$ будет на самом деле оптимальной для $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ в классе всех ее оценок, имеющих смещение, обусловленное точностью проведения преобразований в $\theta \in \Gamma$ и вычисления $\hat{F}(T, \tau)$.

Поскольку смещение ограничено суммарной погрешностью, возникающей при представлении $F(\psi_1, \ldots, \psi_\beta, \tau)$ полиномом (9) и вычислении $\hat{F}(T, \tau)$, то его легко оценить. При необходимости, как нетрудно видеть, его можно уменьшить до требуемых пределов за счет увеличения объема вычислений. Аналогичный вывод можно сделать и в отношении асимптотических оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968, с. 286—289, 304.
2. Ю. В. Линник. Статистические задачи с мешающими параметрами. М., «Наука», 1966.
3. Справочная математическая библиотека. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968, с. 154.
4. И. В. Смертинюк. Оптимальное оценивание параметров сигнала заданной аналитической структуры при нелинейной обработке результатов измерений.— Автометрия, 1970, № 5.
5. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
6. А. М. Каган. Теория оценивания для семейств с параметрами сдвига, масштаба и экспонентных.— Труды МИ АН СССР им. Стеклова, т. 104. Л., «Наука», 1968.

Поступила в редакцию 16 ноября 1972 г.

УДК 621.317.080

Ш.-С. О. АБДУЛАЕВ, Б. А. БЕСЕДИН

(Новосибирск)

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРУЮЩИХ И СГЛАЖИВАЮЩИХ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Определение фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем (ИИ-систем). Под ИИ-системой обычно подразумевают совокупность измерительных приборов, сети передачи измерений и пункта (пунктов) обработки этих измерений. Как большие ИИ-системы можно отнести к управляемым сетям массового обслуживания [1—3]. Различные уточнения этого представления, как правило, связаны с конкретно изучаемыми сторонами ИИ-системы (см. [4—8] и др., в том числе библиографию в [7]).

В настоящее время растет число реальных ИИ-систем с распределенными параметрами, которые нередко охватывают огромные территории. Это обстоятельство ставит новые задачи рационального проектирования и эксплуатации таких систем. Среди многих других важнейшей практической задачей является следующая: сколько измерительных приборов из имеющегося базисного списка нужно выбрать и где их разместить (и в каких точках измерять), чтобы характеристики «стоимость — эффективность» были приемлемыми. Даваемое ниже определение ИИ-систем и формулируемые задачи синтеза имеют целью главным образом дать ответ на этот практический вопрос.

Начнем с того, что ИИ-система может быть либо достаточно хорошо выделимым независимым объектом, как ИИ-система прогноза погоды, либо частью автоматизированной системы управления, доставляя информацию от объекта управления к управляющему центру. Но, во-первых, любое измерение проводится с ошибками, во-вторых, потенциально уменьшает априорную неопределенность относительно объекта измерения. Эта возможность становится фактом после обработки полученных измерений, которая состоит в оценке или прогнозе среды-объекта (погоды, минеральных запасов и т. п.). В частности, в стохастических системах управления эти оценки являются либо достаточными статистиками фазовых координат, либо достаточными координатами управления; в обоих случаях управление — не функция непосредственных измерений, а функция этих оценок [9—11]. Поэтому предварительно мы можем рассматривать ИИ-систему как систему, осуществляющую измерение процесса (состояния объекта) и оценку параметров или процессов, статистически связанных с измерениями. Дальнейшее уточняет это представление.

Определение 1. Информационно-измерительный процесс будем считать заданным, если определена тройка $(x_t,\ H(t),\ f(t))$, где t — время (дискретное или непрерывное); x_t — измеряемый случайный процесс; $H(t)$ — оператор измерения, так что в момент t результат измерений $y_t=H(t,\ x_\tau,\ \eta_t,\ t_0\leqslant\tau\leqslant t)$; t_0 — момент начала измерения; η_t — случайный процесс ошибок измерений; $f(t)$ — неслучайный оператор преобразования y_τ в оценку $\hat{x}_t$ процесса x_t.

В связи с этим определением заметим, что случай, когда измеряется функция x_t, а требуется оценить функцию $z_t(x_t)$, сводится к предыдущему, если $z_t(x_t)$ либо измеряется, либо как функция x_t точно известна.

Определение 2. ИИ-систему будем считать определенной для процесса x_t, если определен оператор измерений $H(t)$ и оценка $\hat{x}_t$ как функция измерений y_τ (т. е. определены $H(t)$ и $f(t)$).

Определение 3. ИИ-систему будем называть фильтрующей (ФИИ-системой) или сглаживающей (СИИ-системой), если оценка $\hat{x}_t$ соответственно фильтрующая или сглаживающая.

Как известно [10, 11], фильтрующая оценка $\hat{x}_t$ процесса x_t в каждый момент времени t строится как функция всех предшествующих моменту t измерений y_τ, т. е. $\hat{x}_t=f(t,\ y_\tau,\ t_0\leqslant\tau\leqslant t)$. Сглаживающая оценка $\hat{x}_t$ в каждый момент времени $t\in[t_0,\ T]$ является функцией всех измерений в течение $[t_0,\ T]:\hat{x}_t=f(t,\ T,\ y_\tau,\ t_0\leqslant\tau\leqslant T)$. Здесь в первом случае $f(t)$ — оператор фильтрующей, а во втором $f(t,\ T)$ — оператор сглаживающей оценки.

Предполагаемое различение ИИ-систем связано главным образом с режимом их работы. Так, ИИ-система, работающая в реальном масштабе времени, может быть только ФИИ-системой, СИИ-система, как очевидно, не реализуема в реальном масштабе времени (отсутствуют измерения более позднего времени), но по окончании измерений оценка $\hat{x}_t$ может, естественно, строиться и как фильтрующая, и как сглаживающая. Если учесть, что, по крайней мере, при сглаживании линейных стохастических процессов требуется вычислять и фильтрующую оценку [11], то можно считать, что СИИ-система более общая, включающая ФИИ-систему в качестве своего более или менее явного элемента.

ИИ-системы будем сравнивать по стоимости и эффективности (точности оценки). При этом будем считать, что различные варианты ИИ-системы фильтрующего или сглаживающего типа порождаются различными вариантами выбора оператора измерений $H(t)$ и оператора оценки $f(t;\ \cdot)$ (или $f(t;\ T;\ \cdot)$).

Определение оптимальных ИИ-систем и задачи их синтеза. В течение $[t_0,\ T]$ времени стоимость c ИИ-систем складывается в общем из стоимости приборов, включенных для измерения, стоимости связывающей их сети и стоимости вычисления оценки. Следовательно, как для ФИИ-, так и для СИИ-систем в общем случае $c=c(T,\ H(t), f(t;\ \cdot), \mu_t,\ t_0\leqslant t\leqslant T)$, где μ_t — параметры (априорные моменты), определяющие случайный процесс $(x_t,\ \eta_t)$.

Эффективность ИИ-системы (исходя из ее определения 2) совершенно естественно определить некоторой функцией φ от дисперсионной матрицы вектора-столбца уклонений (ошибок) $(\hat{x}_t-x_t)$. Дисперсионная матрица $D(t)$ в момент $t\in[t_0,\ T]$, по определению, равна $D(t)=M\left[(\hat{x}_t-x_t)(\hat{x}_t-x_t)^+\right]$, где M — знак математического ожидания, $(+)$ — знак транспонирования. Считая текущую эффективность системы мерой неточности оценки, функцию $\varphi(t)$ следует выбрать неотрицательной скалярной или векторной неслучайной функцией, определенной на элементах матрицы $D(t)$. Конкретный выбор $\varphi(t)$ аналогичен, например, выбору критерия оптимальности регрессионных экспериментов [12]. В частности, скалярная функция $\varphi(t)$ может быть положена равной сумме или произведению собственных значений матрицы $D(t)$ (если $D(t)$ — положительно определенная); вектор-функцию $\varphi(t)$ можно принять равной диагональным элементам матрицы $D(t)$.

Так как дисперсионная матрица $D(t)$ зависит от оператора измерений $H(t)$ (через собственно измерения y_τ), от оператора оценки $f(t;\ \cdot)$, различного для ФИИ- и СИИ-систем, наконец, от параметров μ_τ процесса $(x_\tau,\ \eta_\tau)$, то и функция неточности $\varphi(t)$ также зависит от перечисленных аргументов. Для ФИИ-систем $\varphi(t)=\varphi(t,\ H(\tau),\ f(\tau;\ \cdot),\ \mu_\tau,\ t_0\leqslant\tau\leqslant t)$, для СИИ-систем $\varphi(t)=\varphi(t,\ H(\tau),\ f(\tau,\ T;\ \cdot),\ \mu_\tau,\ t_0\leqslant\tau\leqslant T)$. Этот характер зависимости в точности следует зависимости соответствующих оценок от измерений.

Пусть известно допустимое множество H операторов измерения $H(t)$, $H(t)\in H$ и допустимое множество F операторов $f(t;\ \cdot)$ оценки $f(t;\ \cdot)\in F$. В задачах проектирования ИИ-систем множества H и F определяются техническими возможностями реализации. В задачах эксплуатации ИИ-систем при фиксированном, например, операторе $f(t;\ \cdot)$ оценки множество H порождается совокупностью подмножеств всего множества измерительных приборов данной ИИ-системы.

Определение 4. ИИ-систему будем называть оптимальной (в том или ином смысле), если ее определение совпадает с решением соответствующей условно-экстремальной задачи.

Эти задачи формулируются ниже с различием случаев надежных и ненадежных измерительных приборов. ФИИ- и СИИ-системы особо не выделяем, имея в виду, что различие возникает после детализации функции стоимости $c(\cdot)$ и эффективности $\varphi(t)$.

А. Компоненты ИИ-системы надежны. Тогда значения стоимости и неточности системы неслучайные; предполагаем, что эти функции вычислимы при имеющейся априорной информации.

Смысл следующих задач оптимизации ИИ-систем очевиден.

I. Требуется найти

$$\min_{H(t)\in H}\ \min_{f(t)\in F} c(T;\ \cdot) \tag{1}$$

при ограничении

$$\varphi(t;\ \cdot)\leqslant\varepsilon(t),\ t\in[t_0,\ T], \tag{2}$$

где размерность $\varepsilon(t)$ совпадает с размерностью $\varphi(t;\ \cdot)$, $0<\varepsilon(t)<\infty$.

II. Требуется найти

$$\min_{H(t)\in\mathbf{H}}\ \min_{f(t)\in\mathbf{F}}\ \max_{t\in[t_0,T]} \varphi(t;\ \cdot) \tag{3}$$

при условии

$$c(T;\ \cdot)\leqslant c_0, \tag{4}$$

где $\varphi(t;\ \cdot)$ — скалярная функция элементов матрицы $D(t)$, $0<c_0<\infty$.

Б. Компоненты ИИ-системы ненадежны. Тогда значения функции неточности $\varphi(\cdot)$ случайны, и следует потребовать, чтобы ее значения были ограничены либо с заданной вероятностью, либо с максимальной. Значения стоимости можно считать неслучайными, исходя из того, что затраченные средства не изменяются от того, работает система или нет. Таким образом, при ненадежных компонентах ИИ-системы формулировки задач синтеза аналогичны предыдущим с той лишь разницей, что вместо функции $\varphi(\cdot)$ здесь фигурирует вероятность $P\{\varphi(\cdot)\leqslant\delta(t)\}$.

Очевидно, что сформулированные задачи значительно упрощаются, если один из операторов ИИ-системы — $H(t)$ или $f(t)$ — фиксирован. Если фиксирован оператор измерения $H(t)$, то в пренебрежение затрат отыскание оптимальной оценки $\hat{x}_t$ является, скорее, задачей математической статистики, нежели собственно теории ИИ-систем. Ближе к существу ИИ-систем задача отыскания оптимальной (в определенном смысле) оценки $\hat{x}_t$, обладающей ограниченной стоимостью реализации или — в общем — ограниченной сложностью. В качестве меры сложности можно использовать информационную меру. По-видимому, близкие к ней меры, но практически более приемлемые обсуждались в [5]. Однако задачи этого типа настолько труднее задач без учета сложности, что остается неясным, выигрываем ли мы, экономя таким способом затраты на реализацию.

Более приемлемым в вычислительном отношении и отвечающим собственной проблематике ИИ-систем является следующий подход к решению сформулированных выше задач: фиксировать оператор $f(t)$, выбирая подходящую оценку $\hat{x}_t$ среди развитых в теории фильтрации и сглаживания [10, 11], а затем искать оптимальный оператор измерений $H(t)$. Заметим, что аналогичный подход развит и оказался эффективным в теории оптимального планирования экспериментов [12]. Этот подход ниже иллюстрируется на примере двух частных ИИ-систем.

Оптимальный выбор линейных измерительных приборов при наилучшем линейном оценивании случайного вектора. А. Простейшие нетривиальные задачи сформулированного выше типа соответствуют условиям, когда измеряемым является m-мерный случайный вектор-столбец x, $x\in E^m$, измерения линейны, выход ИИ-системы — наилучшая линейная оценка $\hat{x}$ вектора x.

Пусть задано базисное множество I измерительных приборов N типов, $I=(1,\ 2,\ \ldots,\ N)$, которые могут быть использованы при построении ИИ-системы. Стоимость i-го прибора равна $c_i<\infty$, $i\in I$. Приборы линейны, т. е. результат измерения i-м прибором

$$y_t^i=H_i\,x+\eta_t^i,\quad i\in I, \tag{5}$$

где $t=1,\ 2,\ldots,\ T$ и t — номер измерения; H_i — вещественная $m\times m$ матрица ранга m; η_t^i — последовательность независимых для разных пар $(i,\ t)$ случайных вектор-столбцов; $\eta_t^i\in E^m$; $M\left[\eta_t^i\right]=0$, $M\left[\eta_t^i\left(\eta_t^i\right)^+\right]=R_i$, где $(+)$ — знак транспонирования. Далее полагаем R_i ограниченными симметрическими и положительно-определенными $m\times m$ матрицами $i\in I$.

Если из I выбрано ν_k измерителей с номером k, $k\in I$, то с учетом (5) наилучшая линейная оценка $\hat{x}$ вектора x после T измерений [10]

$$\hat{x}=D\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{N}H_k^+R_k^{-1}\left(y_{t_1}^k+y_{t_2}^k+\ldots+y_{t_{\nu_k}}^k\right), \tag{6}$$

где ковариационная матрица D ошибки $(\hat{x}-x)$

$$D=\frac{1}{T}\left(\sum_{k=1}^{N}\nu_k D_k^{-1}\right)^{-1},\qquad D_k=\left(H_k^{+}R_k^{-1}H_k\right)^{-1},\quad k\in I, \tag{7}$$

а y_{ts}^{k} есть измерение в момент t s-м из числа ν_k приборов k-го типа. В (6), (7) предполагается, что общее число приборов $n=\sum_{k=1}^{N}\nu_k\geqslant 1$.

Из сказанного ясно, что множество H возможных выборов оператора измерений H ИИ-системы взаимно однозначно с множеством всевозможных наборов $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N)$ числа измерительных приборов базисного списка $I=(1, 2, \ldots, N)$, определенного условием $\sum_{i=1}^{N}\nu_i\geqslant 1$, ν_i — неотрицательные целые числа. При этом выбор i-го прибора из списка I эквивалентен выбору матрицы D_i, которые считаем поэтому различными.

Пусть стоимость ИИ-системы определяется только стоимостью ее измерительных приборов $c(\{\nu_k\})=\sum_{k=1}^{N}c_k\nu_k$. В качестве характеристики неточности ИИ-системы можно выбрать, например, следующие функции $\varphi(\{\nu_k\})$:

$$\varphi(D)=\frac{1}{m}\operatorname{tr}D; \tag{8}$$

$$\varphi(D)=|D|; \tag{9}$$

$$\varphi(D)=\operatorname{diag}D. \tag{10}$$

Здесь $\operatorname{tr}D$ — след матрицы D, а $\operatorname{diag}D$ — вектор-столбец из диагональных элементов D.

Б. Предположим, что длительность измерений T фиксирована, приборы I надежны и ищется набор приборов минимальной стоимости, обеспечивающей ограниченную погрешность ИИ-системы. Требуется, следовательно, найти

$$\min_{\{\nu_k\}}\sum_{k=1}^{N}c_k\nu_k \tag{11}$$

при условиях:

$$\varphi(\{\nu_k\})\leqslant\varepsilon; \tag{12}$$

$$\nu_k\geqslant 0;\quad k=\overline{1,N}, \tag{13}$$

где ν_k — целые числа; $\varphi(\cdot)$ — функция, определенная одним из выражений (8)—(10); ε — число для (8), (9) и вектор-столбец для (10); при любом выборе ε — положительное и ограничено.

В противоположной по смыслу задаче требуется найти

$$\min_{\{\nu_k\}}\varphi(\{\nu_k\}), \tag{14}$$

где $\varphi(\cdot)$ определено в (8) или (9), при следующих ограничениях:

$$\sum_{k=1}^{N}c_k\nu_k\leqslant c_0; \tag{15}$$

$$\nu_k\geqslant 0;\ k=\overline{1,N}\ (\nu_k \text{ — целые числа}); \tag{16}$$

$$\infty>c_0\geqslant\max_k c_k>0. \tag{17}$$

Попутно заметим, что условие (17) лишь исключает присутствие в списке базисных приборов I, таких, что на средства c_0 их нельзя «приобрести». (Правомерность невключения в условия задач требования $\Sigma\nu_k\geqslant 1$ будет пояснена ниже).

Существование решений задач и выбор алгоритма решения определяют следующее свойство функции $\varphi(\cdot)$:

в области $\nu_k \geqslant 0$, $k=\overline{1,N}$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \nu_i \geqslant 1$ функции $\varphi(\cdot)$, определенные в (8)—(10), положительные и монотонно убывают по каждому аргументу ν_k, $k=\overline{1,N}$ и N при $N \geqslant 1$.

Справедливость этого свойства следует из неравенства Бергстрома [13] и того факта, что если A и B — положительно определенные матрицы, то $|(A+B)^{-1}|<|A^{-1}|$.

Следствие отмеченного свойства — существование и ограниченность решений обеих задач. Тогда, в частности, решение $\nu_k=0$, $k=\overline{1,N}$ не является оптимальным, так что условие $\Sigma\nu_k \geqslant 1$ (наряду с $\nu_k \geqslant 0$) излишне.

При решении целочисленных экстремальных задач типа (11)—(13) и (14)—(17) можно использовать алгоритм решения, разработанный в [14].

Заметим, что при $m=1$ все критерии (11)—(13) совпадают и соответствующие им задачи являются линейными целочисленными; близкая по содержанию задача изучалась в [3].

Оптимальное размещение однотипных измерителей дальности при линеаризованном оценивании случайного вектора. Здесь рассматривается случай ИИ-системы с однотипными приборами-измерителями дальности. Описывающие их нелинейные уравнения связывают координаты местоположения приборов с координатами оцениваемого случайного вектора. В качестве оценки принята стандартная линеаризованная оценка [10, 11]. Дисперсионная матрица оценки зависит от местоположения измерительных приборов, что естественным образом приводит к задачам оптимального их размещения.

А. Пусть известно, что случайный вектор-столбец $x=(x_1,x_2,x_3)^+ \in E^3$ и имеет среднее значение, равное $\bar{x}$. Вектор x наблюдается измерителями дальности с аддитивными погрешностями: t-е измерение расстояния от k-го прибора с координатами $a^k=(a_1^k,\ a_2^k,\ a_3^k)^+$ до точки x есть

$$y_t^k = \|x-a^k\| + \eta_t^k, \quad t=1,2,\ldots,T, \tag{18}$$

где $\|x-a^k\| = \left((x_1-a_1^k)^2+(x_2-a_2^k)^2+(x_3-a_3^k)^2\right)^{1/2}$; η_t^k — последовательность независимых для разных $(k,\ t)$ случайных величин, имеющих средние значения и дисперсии соответственно ноль и $\sigma^2<\infty$. Однотипность измерителей дальности обязана общему их классу точности σ^2.

После линеаризации (18) в окрестности точки $\bar{x}$ имеем приближенное равенство

$$y_t^k = h^k(x-\bar{x}) + \eta_t^k, \tag{19}$$

где

$$h^k = (h_1^k, h_2^k, h_3^k); \quad h_i = \frac{(\bar{x}_i - a_i^k)}{\|\bar{x}-a^k\|}. \tag{20}$$

Следовательно, линеаризованный оператор измерения, сформированный N измерителями дальности, равен матрице $H=(h^1,\ h^2,\ h^3, \ldots, h^N)^+$. Чтобы измерения содержали информацию о всех координатах вектора x, потребуем, чтобы ранг матрицы H был максимальным, равным трем (требование стохастической наблюдаемости [10]). Это эквивалентно требованию, что среди N приборов существует три с номерами $i,\ j,\ k$, таких, что

$$V_{ijk} \neq 0, \tag{21}$$

где V_{ijk} равно ориентированному объему треугольной пирамиды с вершинами в точках $\bar{x}$, a^i, a^j, a^k.

Линеаризованная оценка $\hat{x}$ вектора x после T измерений равна [10, 11]

$$\hat{x} = \sigma^{-2} D \sum_{t=1}^{T} H^{+} \left(y_t + H\bar{x}\right) \tag{22}$$

и имеет дисперсионную матрицу уклонения $(\hat{x}-x)$, равную

$$D = \frac{\sigma^2}{T} (H^{+}H)^{-1}. \tag{23}$$

Матрица D положительно определенная, поскольку H по условию (21) имеет максимальный ранг [11, 15].

Функция неточности $\varphi(D)$ ИИ-системы может быть выбрана так же, как и в предыдущем разделе. Стоимость ИИ-системы в данном случае с точностью до константы равна числу измерителей дальности N.

Б. Задачей, аналогичной (11)—(13), будет следующая: найти

$$\min N \tag{24}$$

при условиях, что N — целое число, $N \geqslant 3$, существует (21) и выполняется неравенство

$$\min_{\{a^k\} \in X} \varphi(D) \leqslant \varepsilon, \tag{25}$$

где X — допустимая область размещения измерительных приборов; D определено в (23); скалярная функция $\varphi(D)$ имеет вид (8) или (9); ε — конечное положительное число.

Очевидно, что если N фиксировано, то задача состоит только в минимизации $\varphi(D)$ размещением в X.

Пусть для определенности $\varphi(D) = |D| = \frac{\sigma^2}{T} |H^{+}H|^{-1}$ и требуется найти размещение в X N приборов, минимизирующее определитель $|D|$.

Во-первых, применяя формулу Бине — Коши [15] к определителю $|H^{+}H|$, нетрудно заметить, что если допустимая область X содержит не менее трех точек и для некоторой тройки приборов i, j, k справедливо (21), то $|D|$ уменьшается при любом размещении в X дополнительного прибора.

Обозначим: $h_i = \left(h_i^1, h_i^2, \ldots, h_i^N\right)^{+}$, $i = 1, 2, 3$.

Пусть в X существует размещение N приборов, для которых выполняются три равенства:

$$h_1^{+}h_2 = 0, \quad h_1^{+}h_3 = 0, \quad h_2^{+}h_3 = 0. \tag{26}$$

Если учесть, что согласно (21), h_i^k есть значение i-го направляющего косинуса вектора $\left(\bar{x} - a^k\right)$, то условия (26) реализуемы, по крайней мере, для трехмерных тел X, имеющих $\bar{x}$ своей внутренней точкой.

Попутно заметим, что условия (26), связывая направляющие косинусы лучей из $\bar{x}$ в a^k, $k = \overline{1, N}$, в общем оставляют открытым вопрос о выборе a^k на этих лучах.

Обозначая через $\Gamma(\cdot)$ определитель Грамма соответствующих векторов, легко проверить, что $|D| = \frac{\sigma^2}{T} (\Gamma(h_1, h_2, h_3))^{-1}$.

Воспользуемся неравенством Адамара

$$\Gamma(h_1, h_2, h_3) \leqslant \Gamma(h_1)\Gamma(h_2)\Gamma(h_3), \tag{27}$$

где $\Gamma(h_i) = h_i^{+}h_i$. Так как $\Gamma(h_1, h_2, h_3) \neq 0$, то, как известно [15], равенство в (27), а следовательно, и нижняя грань $|D|$ достигаются только при условии (26) попарной ортогональности векторов h_1, h_2, h_3. Полагая, что область X допускает размещения N приборов с условиями (26), при минимизации $|D|$ имеем следующее его выражение:

$$|D| = \frac{\sigma^2}{T} \left(h_1^+ h_1\right)^{-1} \left(h_2^+ h_2\right)^{-1} \left(h_3^+ h_3\right)^{-1}. \tag{28}$$

Если дополнительно потребовать покомпонентную равноточность оценки $\hat{x}$, т. е. чтобы эллипсоид рассеяния был сферой, то это эквивалентно тому, что все собственные значения матрицы D одинаковы, или

$$h_1^+ h_1 = h_2^+ h_2 = h_3^+ h_3. \tag{29}$$

Условие равноточности (29) позволяет вычислить оптимальное значение обобщенной дисперсии $|D|$. Очевидное тождество $\left(h_1^k\right)^2 + \left(h_2^k\right)^2 + \left(h_3^k\right)^2 = 1$ совместно с двумя уравнениями (29) дает:

$$h_i^+ h_i = \frac{N}{3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad |D| = \frac{27\sigma^2}{TN^3}. \tag{30}$$

Отсюда непосредственно видно, что для фиксированного числа приборов N условия (26) и (29) обеспечивают оптимальное размещение приборов в смысле глобального минимума $|D|$.

Следует заметить, что при условиях (26), (29) не обнаруживается явная зависимость $|D|$ от удаленности измерительных приборов от точки априорного среднего $\bar{x}$. С другой стороны, из уравнения измерений (18) следует, что при ограниченных априорных дисперсиях значений x отношение сигнал/шум тем выше, чем более удалены приборы от точки среднего $\bar{x}$. По-видимому, отсутствие явной зависимости связано с применением линеаризованной оценки, но, возможно, эта зависимость заложена в условиях ортогональности (26). Этот факт требует дополнительного анализа.

Рассмотренные задачи относятся к задаче «проектирования» ИИ-системы с однотипными измерителями дальности. Полученные формулы позволяют изучать и задачи оптимальной эксплуатации ИИ-системы, когда местоположения N приборов фиксированы и требуется выбрать подмножество приборов, обладающее некоторым условно-экстремальным свойством. В частности, может быть найдено наилучшее априорное среднее $\bar{x}$ для ИИ-системы с фиксированными положениями измерителей дальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Беседин. Синтез управляемых сетей массового обслуживания.— В сб. «Адаптивные системы. Большие системы». Тр. I Всесоюзного симпозиума по статистич. пробл. в техн. киберн., 1967. М., «Наука», 1971.
2. Б. А. Беседин, А. П. Рыжаков. Марковские управления в оптимальных по надежности сетях массового обслуживания.— Изв. АН СССР, «Техническая кибернетика», 1968, № 3.
3. Ш.-С. О. Абдулаев. Задача распределения функций управления в сложных измерительных системах.— Автометрия, 1968, № 5.
4. Г. И. Марчук, Ю. П. Дробышев. Некоторые вопросы линейной теории измерений.— Автометрия, 1967, № 3.
5. Ю. П. Дробышев. Оптимальные характеристики приборов.— В сб. «Сокращение объема измерительной информации» (Тр. I симпозиума). Новосибирск, «Наука», 1968.
6. Космические траекторные измерения.— Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных. Коллектив авторов под ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева. М., «Советское радио», 1969.
7. Автоматизированные информационные системы.— В сб. Всесоюзн. заочного политехн. ин-та, вып. 62. М., 1970.
8. Д. С. Конторов, Ю. С. Голубев-Новожилов. Введение в радиолакационную систематехнику. М., «Советское радио», 1971.
9. Р. Л. Стратонович. К теории оптимального управления. Достаточные координаты.— Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXII, № 7.
10. М. Аоки. Оптимизация стохастических систем. М., «Наука», 1971.

11. А. Брайсон, Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
12. В. В. Федоров. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). М., «Наука», 1971.
13. Э. Беккенбах, Р. Беллман. Неравенства. М., «Мир», 1965.
14. В. Ф. Демьянов. К решению целочисленных задач выпуклого программирования.— В сб. «Оптимальные системы автоматического управления». М., «Наука», 1967.
15. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953.

Поступила в редакцию 10 сентября 1973 г.

УДК 681.2.082/083.519.2

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ, Я. Я. ТОМСОНС

(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ НЕТОЧНО ЗАДАННОМ ОПЕРАТОРЕ

В [1] решалась задача восстановления оценок спектральной плотности (СП) входного сигнала измерительной системы, описываемой уравнением

$$\int_{-\infty}^{t} k(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau + n(t) = y(t) + n(t) = z(t). \qquad (1)$$

Здесь $k(t)$ — импульсная функция системы; $x(\tau)$, $y(t)$ — случайные стационарные процессы со спектральными плотностями $\Gamma_{xx}(\omega)$, $\Gamma_{yy}(\omega)$; $z(t)$ — регистрируемый выходной сигнал, искаженный стационарной случайной помехой $n(t)$, выборочная функция которой доступна (до или после проведения эксперимента) для определения статистических характеристик при допущении, что $k(t)$ известна точно. Были получены оптимальные и квазиоптимальные оценки восстановленной СП и их характеристики с использованием методов регуляризации.

В данной работе такой подход распространяется на случай, когда оператор системы $A(\omega)=\left|\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau\right|^2$ известен с ошибкой: $A_h(\omega)=A(\omega)+h(\omega)$, где $h(\omega)$ — случайная величина с $M[h(\omega)]=\mu(\omega)$, $\mathrm{Var}[h(\omega)]=\sigma_h^2(\omega)$. Оправданием такого рассмотрения является тот факт, что $A(\omega)$ часто получается из экспериментальных (тарировочных) данных или меняется вследствие возмущения окружающей среды.

Как и в [1], допускается, что $\Gamma_{ny}(\omega)=0$; выборочная СП $C_{zz}(\omega)$, определенная по реализации $z(t)$ ($t\in[0,T]$), имеет [1, 2] $M[C_{zz}(\omega)]\simeq\simeq\Gamma_{zz}(\omega)$; $\mathrm{Var}[C_{zz}(\omega)]\simeq\psi_{zz}\Gamma_{zz}^2(\omega)$ и приближенно подчиняется распределению $a_z\chi^2_{\nu_z}$ с $\nu_z=2/\psi_{zz}$ степенями свободы (a_z — постоянная величина; $\chi^2_{\nu_z}$ — χ^2 — распределение); $\omega\in\Omega_1=\{\omega\colon A_h(\omega)\neq 0\}$.

Вводится регуляризованная оценка

$$C_{xx}^{\alpha_h}=\frac{A_h(\omega)\,C_{zz}(\omega)}{A_h^2(\omega)+\alpha(\omega)}. \qquad (2)$$

Параметр регуляризации $\alpha(\omega)$ отыскивается из условия минимума среднеквадратической ошибки (СКО) восстановления

$$\varepsilon_\alpha(\omega)=C_{xx}^{\alpha_h}(\omega)-\Gamma_{xx}(\omega).$$