УДК 681.327.5.21

С. Т. ВАСЬКОВ, И. М. САХАРОВ

(Новосибирск)

ТОЧНОСТЬ ОТСЧЕТА КООРДИНАТ В СИСТЕМЕ С ОПТИЧЕСКИМИ РЕШЕТКАМИ

Автоматические устройства кодирования и ввода в ЭВМ координат изображений, в которых сканирующий узел выполнен на основе электронно-лучевой трубки (ЭЛТ) высокого разрешения, в настоящее время являются наиболее перспективными. В приборах этого типа [1—3] требуемая точность достигается применением специальных координатных решеток, по которым одновременно с перемещением по изображению движется сканирующий луч ЭЛТ. Известно [4], что распределение яркости светового пятна ЭЛТ близко к нормальному:

$$f(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2r^2}}, \qquad (1)$$

где x_0, y_0 — координаты центра светового пятна; r — параметр закона.

Точность таких систем ввода определяется погрешностью, которая обусловлена шумами приемника света (ФЭУ), конечными размерами апертуры луча и шумами датчика света (ЭЛТ). Поэтому целесообразно провести анализ влияния отдельных составляющих погрешности на точность и определить оптимальные соотношения, позволяющие повысить точность отсчета координат.

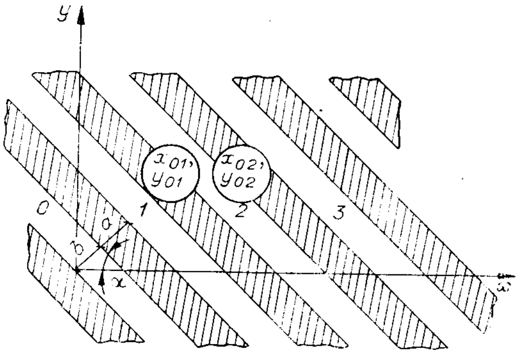

Рис. 1. Координатная решетка.

Для проведения анализа удобно представить экран ЭЛТ равномерно возбужденным (засвеченным), а сканирование координатных решеток производить приемником с апертурой, определяемой выражением (1). Правомерность такого представления обоснована в [4, 5].

Координатные решетки представляют собой наклоненные под углом α к оси x линии с коэффициентом пропускания $\mu(x, y)=0$, нанесенные на подложку с коэффициентом пропускания $\eta(x, y)=1$, т. е. абсолютно непрозрачные линии шириной a нанесены на расстоянии b на прозрачную подложку (рис. 1).

Корреляционная функция $R(x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02})$ шума ЭЛТ, прошедшего через такую решетку, определяется интегралом

$$R(x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02}) = \iint\limits_{S\,S} f(x_1, y_1, x_{01}, y_{01}) f(x_2, y_2, x_{02}, y_{02}) \times$$
$$\times E[\zeta_1(x_1, y_1)\zeta_2(x_2, y_2)]dx_1dx_2dy_1dy_2, \qquad (2)$$

где $f(x_1, y_1, x_{01}, y_{01})$, $f(x_2, y_2, x_{02}, y_{02})$ — яркость пятна ЭЛТ с центром в точке с координатами x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02} соответственно; S — область координатной решетки, где коэффициент пропускания $\eta(x, y)=1$; $\zeta_1(x_1, y_1)$, $\zeta_2(x_2, y_2)$ — значение шума ЭЛТ в точках с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 соответственно; $E[\zeta_1(x_1, y_1)\ \zeta_2(x_2, y_2)]$ — корреляционная функция шума ЭЛТ. Пространственный шум ЭЛТ в полосе пропускания апертуры луча является «белым» пространственным шумом. Корреляционная функция «белого» шума

$$E[\zeta(x_1, y_1)\ \zeta(x_2, y_2)] = D\delta(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1), \tag{3}$$

где $\delta(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ — дельта-функция; D — спектральная плотность мощности шума ЭЛТ. Вычисление (2) с учетом свойства δ-функции (3) дает

$$R(x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02}) = D \int\limits_S f(x_1, y_1, x_{01}, y_{01}) f(x_1, y_1, x_{02}, y_{02})\, dx_1 dy_1. \tag{4}$$

Функция, описывающая коэффициент пропускания решетки, может быть представлена в виде [6]

$$r(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } n(a+b) \leqslant x\sin\alpha + y\cos\alpha \leqslant na + (n+1)b; \\ \qquad -\infty \leqslant x \leqslant \infty; \\ 0, \text{ если } na + (n+1)b \leqslant x\sin\alpha + y\cos\alpha \leqslant (n+1)(a+b); \\ \qquad -\infty \leqslant x \leqslant \infty; \\ \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty. \end{cases} \tag{5}$$

Вычисление (4) с учетом (5) и (1) приводит к выражению

$$R(x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02}) = \frac{D}{4\pi r^2} e^{-\frac{(x_{01}-x_{02})^2 + (y_{01}-y_{02})^2}{4\pi r^2}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{ \Phi\left[\sqrt{2}\, \frac{n(a+b) + b - \frac{y_{01}+y_{02}}{2}\cos\alpha - \frac{x_{01}+x_{02}}{2}\sin\alpha}{r}\right] - \right. \tag{6}$$

$$\left. - \Phi\left[\sqrt{2}\, \frac{n(a+b) - \frac{y_{01}+y_{02}}{2}\cos\alpha - \frac{x_{01}+x_{02}}{2}\sin\alpha}{r}\right]\right\},$$

где

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — интеграл вероятности.

Полагая в (6) $y_{01} = y_{02} = y_0$ и $x_{01} = x_{02} = x_0$, получим выражение, определяющее изменение дисперсии шума ЭЛТ в зависимости от положения луча ЭЛТ относительно координатной решетки

$$\sigma^2(x_0, y_0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sigma^2_{\max} \left\{ \Phi\left[\sqrt{2}\, \frac{n(a+b) + b - y_0\cos\alpha - x_0\sin\alpha}{r}\right] - \right.$$

$$\left. - \Phi\left[\sqrt{2}\, \frac{n(a+b) - y_0\cos\alpha - x_0\sin\alpha}{r}\right]\right\},$$

где $\sigma^2_{\max} = \frac{D}{4\pi r^2}$ — дисперсия шума ЭЛТ без координатной решетки.

Не нарушая общности анализа, можно положить, что световой луч движется по одной из координатных осей, например, по $x(y=0)$. Тогда получим выражение, определяющее изменение дисперсии шума ЭЛТ в зависимости от координаты x:

$$\sigma^2_э(x) = \sigma^2_{\max} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{ \Phi\left[\sqrt{2}\, \frac{n(a+b) + b - x\sin\alpha}{r}\right] - \Phi\left[\sqrt{2}\, \frac{n(a+b) - x\sin\alpha}{r}\right]\right\}. \tag{7}$$

Ряд (7) может быть ограничен тремя членами $-1 \leqslant n \leqslant 1$, если предположить, что $r < (a+b)$. Кривая распределения апертуры луча в этом случае лежит в основном в пределах трех линий, ближайших к центру пятна.

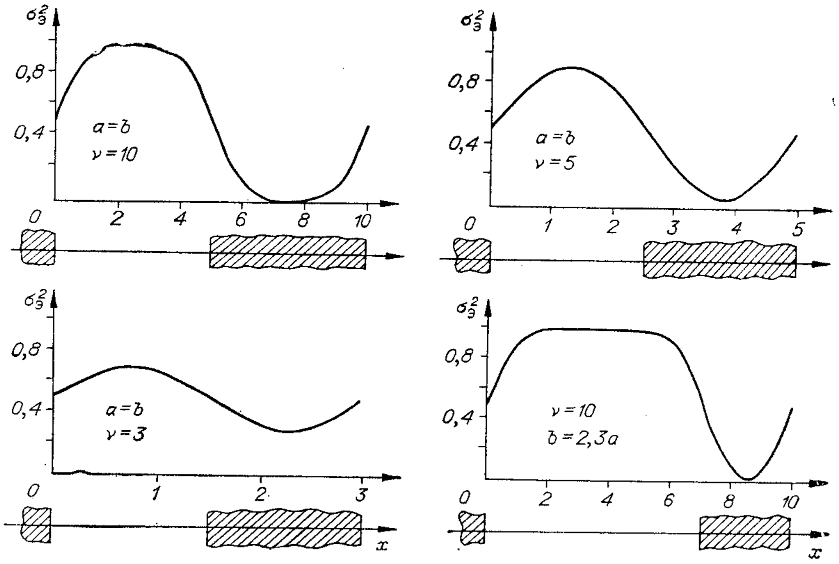

Рис. 2. Зависимость дисперсии шума ЭЛТ от положения луча относительно координатной решетки.

Наличие в координатном канале оптической решетки приводит к модуляции шума ЭЛТ. Таким образом, шум ЭЛТ, воздействующий на сигнал в координатном канале, является нестационарным случайным шумом, дисперсия которого уменьшается при увеличении радиуса луча ЭЛТ и уменьшении отношения: шаг решетки к радиусу луча ЭЛТ. Обозначим отношение шага решетки к радиусу луча ЭЛТ через ν, т. е. $(a+b)/r=\nu$.

На рис. 2 в относительных единицах представлены графики функции (7) при различных значениях a, b, ν. Условием нормировки является

$$\sigma^2_{\max}=1; \qquad r=1.$$

При переходе к абсолютным единицам значения линейных параметров необходимо умножить на размерную величину r, например: $a+b=\nu r$.

Рассмотрим условия, при которых возможно получить минимальную дисперсию ошибки отсчета координат, полагая, что основной причиной погрешности являются помехи, воздействующие на сигнал $U_с(x)$ в координатном канале системы. Представим сигнал на выходе фотоэлектрического узла в виде

$$U(x)=U_с(x)+U_ш(x),$$

где $U_ш(x)$ — случайная составляющая, содержащая шумы ФЭУ и ЭЛТ.

Можно показать [6], что сигнал $U_с(x)$ в координатном канале описывается выражением

$$U_c(x)=U_{c\max}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\Phi\left[\frac{n(a+b)+b-x\sin\alpha}{r}\right]-\Phi\left[\frac{n(a+b)-x\sin\alpha}{r}\right]\right\}, \qquad (8)$$

где $U_{c\max}$ — сигнал на выходе фотоэлектрического узла без координатных решеток;

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \text{ — интеграл вероятности.}$$

Сигнал $U(x)$ поступает на схему, которая срабатывает при пересечении им порога U_0. Момент пересечения определяет значение координаты. Воздействие помех приводит к случайному изменению момента срабатывания, т. е. значение координаты будет отличаться от действительной на величину σ_Δ.

В случае, когда помехи $U_ш(x)$ малы по сравнению с сигналом и скорость их изменения меньше, чем крутизна сигнала, среднеквадратичное значение σ_Δ смещения момента пересечения сигналом порога пропорционально среднеквадратичному значению шума $\sigma_ш$ и обратно пропорционально крутизне сигнала в окрестности порогового уровня [7]:

$$\sigma_\Delta = \sigma_ш(x)/U_c'(x). \tag{9}$$

Шумы ФЭУ и ЭЛТ практически не коррелированы [8], поэтому

$$\sigma_ш^2(x) = \sigma_э^2(x) + \sigma_ф^2(x), \tag{10}$$

где $\sigma_э^2(x)$ — дисперсия шума ЭЛТ, определяемая уравнением (7); $\sigma_ф^2(x)$ — дисперсия шума ФЭУ. Дисперсия шума фотоэлектрического умножителя, согласно [5], равна

$$\sigma_ф^2 = \gamma U_c, \tag{11}$$

где γ — коэффициент пропорциональности; U_c — сигнал фотоэлектрического узла.

Вычисление (10) с учетом (11) и (7) приводит к результату

$$\sigma_ш^2(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{\sigma_{э\max}^2\left[\Phi\left(\sqrt{2}A\right) - \Phi\left(\sqrt{2}B\right)\right] + \sigma_{ф\max}^2\left[\Phi(A) - \Phi(B)\right]\right\}, \tag{12}$$

где

$$A = \frac{n(a+b) + b - x\sin\alpha}{r}; \quad B = \frac{n(a+b) - x\sin\alpha}{r};$$

$\sigma_{ф\max}^2 = \gamma U_{c\max}$ — дисперсия шума ФЭУ без координатной решетки.

Если обозначить $\beta = \sigma_{ф\max}^2/\sigma_{э\max}^2$, то выражение (9) для среднеквадратичного значения смещения момента срабатывания принимает вид

$$\sigma_\Delta(x) = \frac{r\sqrt{2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\Phi\left(\sqrt{2}A\right) - \Phi\left(\sqrt{2}B\right) + \beta\left[\Phi(A) - \Phi(B)\right]\right\}}}{\sqrt{q(1+\beta)}\sin\alpha\left(e^{-\frac{B^2}{2r^2}} - e^{-\frac{A^2}{2r^2}}\right)},$$

где $q = U_{c\max}^2/\sigma_{\max}^2$ — отношение сигнал/помеха в канале фотоэлектрического узла. Это выражение справедливо для любых r, a, b, α, β и является обобщением полученного в [6] результата для $\sigma_ф^2 \gg \sigma_э^2$.

Уровень сигнала U_0, при котором будет наименьшей случайная ошибка, можно определить из уравнения (8), зная координату x_0 — точку, где среднеквадратичное значение случайной ошибки минимально. Аналитическое решение этой задачи затруднено отысканием корней трансцендентного уравнения $[\sigma_\Delta(x_0)]' = 0$.

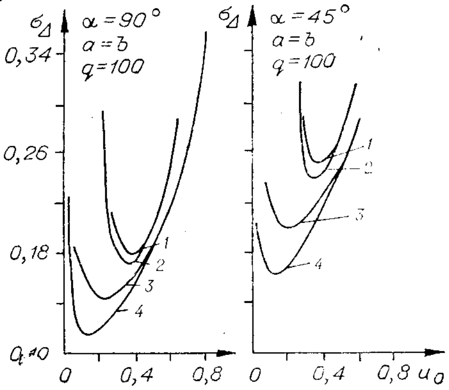

Рис. 3. Зависимость σ_Δ от величины порога u_0:
1 — $\nu=5$; $\beta=1$; 2 — $\nu=5$; $\beta=0{,}1$; 3 — $\nu=10$; $\beta=1$; 4 — $\nu=10$; $\beta=0{,}1$.

На рис. 3, 4 в относительных единицах представлены графики зависимости среднеквадратичного значения смещения момента пересечения сигналом порога от величины порога u_0 при различных a, b, ν, β, рассчитанные численным методом на

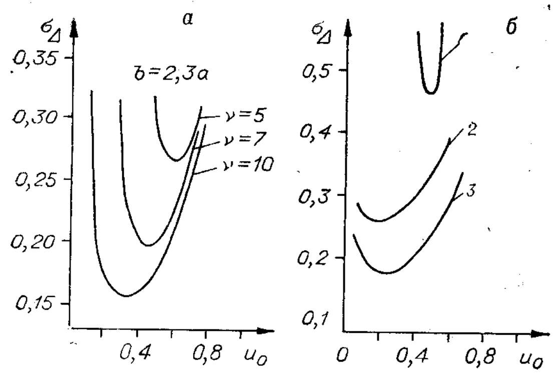

Рис. 4. Зависимость σ_Δ от величины порога u_0:
а — $q=100$; $\alpha=90°$; $\beta=1$; *б* — *1* — $q=100$; $\alpha=90°$; $\nu=3$; *2* — $q=60$; $\alpha=45°$; $\nu=10$; $\beta=1$; *3* — $q=60$; $\alpha=90°$; $\nu=10$; $\beta=1$.

ЭЦВМ. Здесь (см. рис. 3, 4) и далее (рис. 5, 6) условием нормировки является: $r=1$; $U_{c\,\max}=1$. При переходе к абсолютным единицам необходимо:

а) значения линейных параметров умножить на размерную величину r, например: $a+b=\nu r$; $\sigma=\sigma_\Delta r$;

б) значение сигнала u_0 в относительных единицах умножить на размерную величину $U_{c\,\max}$, например: $U_0=u_0 U_{c\,\max}$.

Уровень сигнала U_0, при котором получается наименьшая случайная ошибка, является функцией параметров оптической решетки, радиуса луча ЭЛТ и параметра β — отношения дисперсий шума ФЭУ и ЭЛТ. Так, при увеличении β и уменьшении $\nu=(a+b)/r$ значение порога U_0 увеличивается. Например, для решетки с шагом 100 мкм: при $a=b, \alpha=45°, \beta=0{,}1, \nu=10, q=100$ имеем порог $U_0=0{,}15U_{c\,\max}$, при $a=b$, $\alpha=45°$, $\beta=1$, $\nu=5$, $q=100$ — $U_0=0{,}38U_{c\,\max}$.

Значение координаты x_0 в общем случае (для произвольных r, a, b, α, β) не совпадает с координатами границ линий. Появляется систематическая ошибка, которую можно определить как разность между координатой границ линии $x_г$ и x_0:

$$\delta=x_г-x_0.$$

На рис. 6 представлены графики зависимости δ от ν при различных значениях α, β.

Наличие систематической ошибки, полученной из критерия минимума случайной ошибки, не отразится на точности отсчета координат, так как первую известными способами всегда можно учесть.

Величина случайной ошибки, так же как и порог U_0, является функцией параметров оптической решетки и радиуса луча ЭЛТ (при q и $\beta=\text{const}$. Так, с увеличением (в известных пределах) отношения ша-

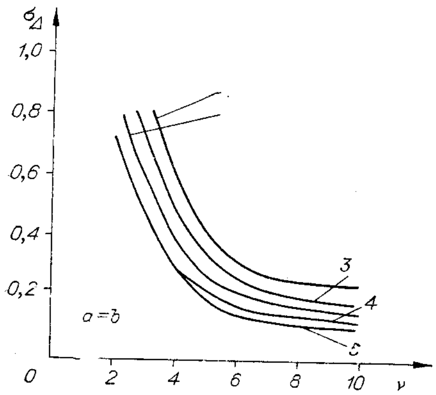

Рис. 5. Зависимость σ_Δ от отношения шага решетки к радиусу луча ЭЛТ:
1 — $q=60$; $\alpha=45°$; $\beta=1$; *2* — $q=60$; $\alpha=90°$; $\beta=1$; *3* — $q=100$; $\alpha=45°$; $\beta=0{,}1$; *4* — $q=100$; $\alpha=90°$; $\beta=1$; *5* — $q=100$; $\alpha=90°$; $\beta=0{,}1$.

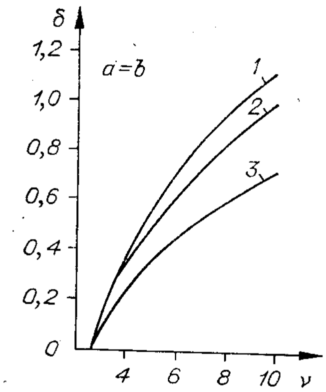

Рис. 6. Зависимость систематической ошибки от отношения шага решетки к радиусу луча ЭЛТ:
1 — $\alpha=90°$; $\beta=0{,}1$; *2* — $\alpha=45°$; $\beta=1$; *3* — $\alpha=90°$; $\beta=1$.

га решетки к радиусу луча ЭЛТ значение случайной ошибки уменьшается. При $\nu=\mathrm{const}$ величина случайной ошибки пропорциональна радиусу луча ЭЛТ и обратно пропорциональна синусу угла наклона линий оптической решетки.

Оптимальным отношением шага решетки к радиусу луча ЭЛТ является $7\leqslant\nu\leqslant10$. При $\nu<7$ величина случайной ошибки значительно возрастает. Увеличение $\nu>10$ (при $r=\mathrm{const}$) не приводит к уменьшению случайной ошибки σ_Δ, так как крутизна сигнала U_c в этом случае будет ограничена конечными размерами апертуры луча.

В случае, когда $\nu\geqslant7$, выражение для среднеквадратичного значения случайного смещения момента срабатывания упрощается:

$$\sigma_\Delta(x)=\frac{r\sqrt{2\pi}\sqrt{\Phi\left(\sqrt{2}\,\frac{b-x\sin\alpha}{r}\right)+\Phi\left(\sqrt{2}\,\frac{x\sin\alpha}{r}\right)+\beta\left[\Phi\left(\frac{b-x\sin\alpha}{r}\right)+\Phi\left(\frac{x\sin\alpha}{r}\right)\right]}}{\sin\alpha\sqrt{q\,(1+\beta)}\left[e^{-\frac{x^2\sin^2\alpha}{2r^2}}-e^{-\frac{(b-x\sin\alpha)^2}{2r^2}}\right]}.$$

На рис. 5 приведены графики зависимости σ_Δ от ν, рассчитанные численным методом на ЭЦВМ. Например, абсолютное значение σ_Δ для решетки с шагом 100 мкм при $q=60$, $\alpha=90°$, $\beta=1$ и $r=12$ мкм составляет 2,2 мкм.

Авторы приносят благодарность канд. техн. наук В. М. Ефимову за любезно оказанную помощь при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Борисовский, А. С. Буров и др. Сканирующий автомат на электронно-лучевой трубке. Препринт ОИЯИ, Р-10-3631. Дубна, 1967.
2. С. Т. Васьков, Л. С. Вертопрахова и др. Сканирующий автомат для ввода в ЭЦВМ фильмовой информации.— Автометрия, 1970, № 2.
3. Автоматическая обработка графической информации с применением универсальных ЭВМ.— Средства вычислительной техники и оргтехники, вып. 2. М., ЦНИИИТЭИ ПСА и СУ, 1971.
4. В. А. Миллер, Л. А. Куракин. Приемные электронно-лучевые трубки. М., «Энергия», 1964.
5. А. Н. Петренко. Автоматический ввод графиков в электронные вычислительные машины. М., «Энергия», 1968.
6. А. М. Остапенко. Анализ точности отсчета координат в системе с оптическими решетками.— Автометрия, 1972, № 3.
7. В. В. Тихонов. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.
8. Я. А. Рыфтин. Телевизионная система. М., «Советское радио», 1967.

Поступила в редакцию 27 ноября 1972 г.