УДК 62-50

В. П. ПЕРОВ
(*Ленинград*)

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ДИСКРЕТНОМ ПОСТУПЛЕНИИ ИНФОРМАЦИИ

Выходная функция $X[n, \varepsilon]$ дискретного линейного фильтра выражается через дискретные значения входной функции $Y[n]$ с помощью весовой функции $K[n, \varepsilon]$ следующим образом:

$$X[n, \varepsilon] = \sum_{l=0}^{N} K[l, \varepsilon]\, Y[n-l],$$

где n, l — целые числа, выражающие время в относительных единицах, равных периоду поступления информации; ε — параметр, изменяющийся от 0 до 1 и выражающий время в промежутки между целыми периодами; N — память фильтра.

Таким образом, дискретный фильтр полностью характеризуется его функцией веса. Поэтому задача определения оптимальной процедуры дискретной фильтрации состоит в определении оптимальной функции веса. Условие для весовой функции дискретного линейного фильтра, оптимального в смысле критерия минимума среднего по множеству и по времени [1] квадрата ошибки при заданной памяти (N) в предположении комплексности входных функций [2], имеет следующий вид:

$$\sum_{l=0}^{N} \overline{\widetilde{Y[n-l]\,Y^*[n-m]}}\, K[l, \varepsilon] = \overline{\widetilde{hS[n, \varepsilon]\, Y^*[n-m]}}; \quad (0 \leqslant m \leqslant N), \tag{1}$$

где $Y[n]$ — входная функция фильтра, состоящая из сигнала и помехи; $Y^*[n]$ — функция комплексно-сопряженная $Y[n]$; $S[n, \varepsilon]$ — сигнал, т. е. полезная функция, поступающая на вход фильтра и воспроизводимая, либо линейно преобразуемая им; h — оператор требуемого линейного преобразования; прямая черта в условии (1) означает усреднение по множеству, а волнистая — по времени.

Предположим, что входная функция содержит составляющую помехи типа «белый» шум $p_{ш}[n]$, не коррелированную с остальными составляющими $\varphi[n]$, т. е.

$$Y[n] = \varphi[n] + p_{ш}[n];$$

$$\overline{\widetilde{Y[n-l]\,Y^*[n-m]}} = \overline{\widetilde{\varphi[n-l]\,\varphi^*[n-m]}} + c^2\delta[l-m];$$

$$\overline{\widetilde{hS[n, \varepsilon]\,Y^*[n-m]}} = \overline{\widetilde{hS]n, \varepsilon]\,\varphi^*[n-m]}},$$

где

$$\delta[l-m] = \delta_{lm} = \begin{matrix} 1 & \text{при} & l = m; \\ 0 & \text{при} & l \neq m; \end{matrix} \quad c^2 = \overline{\widetilde{p_{ш}^2[n]}}.$$

Тогда условие (1) перепишем в виде

$$c^2K[m, \varepsilon] + \sum_{l=0}^{N} K[l, \varepsilon]\, \overline{\widetilde{\varphi[n-l]\,\varphi^*[n-m]}} = \overline{\widetilde{hS[n, \varepsilon]\,\varphi^*[n-m]}}. \tag{2}$$

Предположим далее, что

$$\varphi[n] = S[n] + p[n] - \tag{3}$$

периодическая функция случайной формы с периодом $T = N+1$, а $S[n, \varepsilon]$ — периодическая функция случайной либо заданной формы с тем же периодом. Равенство периодов не является обязательным и предполагается лишь для простоты обозначений. Периодичность функций позволяет представить их в виде экспоненциального ряда Фурье следующим образом:

$$\varphi[n] = \sum_{k} c_{\varphi k}\, e^{ik\Omega n}; \tag{4}$$

$$hS[n, \varepsilon] = H[n, \varepsilon] = h\sum_{k} c_{sk}\, e^{ik\Omega(n+\varepsilon)} = \sum_{k} c_{нk}\, e^{ik\Omega(n+\varepsilon)}, \tag{5}$$

где $\Omega = 2\pi/(N+1)$ (суммирование по k производится в пределах от $-\infty$ до ∞). Соответственно

$$\overline{\widetilde{\varphi[n-l]\,\varphi^*[n-m]}} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k}\sum_{\nu} \overline{c_{\varphi\nu}\, c_{\varphi k}^*}\, e^{-ik\Omega(n-l)}\, e^{i\nu\Omega(n-m)} =$$

$$= \sum_{k,\nu} \overline{c_{\varphi\nu}\, c_{\varphi k}^*}\, e^{i\Omega(lk - m\nu)} \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} e^{i\Omega n(\nu - k)}.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} e^{i\Omega n\,(\nu-k)} = \frac{1}{N+1}\,\frac{e^{i\Omega\,(\nu-k)(N+1)}-1}{e^{i\Omega\,(\nu-k)}-1} = \delta_{\nu k}, \tag{6}$$

находим

$$\overline{\widetilde{\varphi}\,[n-l]\,\widetilde{\varphi}^*\,[n-m]} = \sum_k \overline{|c_{\varphi k}|^2}\, e^{ik\Omega\,(m-l)}. \tag{7}$$

Аналогично

$$\overline{\widetilde{H}\,[n,\,\varepsilon]\,\widetilde{\varphi}^*\,[n-l]} = \sum_k \overline{c_{нk}\,c^*_{\varphi k}}\, e^{ik\Omega\,(l+\varepsilon)}. \tag{8}$$

Подставляя (8) и (7) в (2), имеем

$$c^2K\,[l,\,\varepsilon] + \sum_k \overline{|c_{\varphi k}|^2}\,\mu_k\,(\varepsilon)\, e^{ik\Omega l} = \sum_k \overline{c^*_{\varphi k}\,c_{нk}}\, e^{ik\Omega l}, \tag{9}$$

где

$$\mu_k\,(\varepsilon) = \sum_{m=0}^{N} K\,[m,\,\varepsilon]\, e^{ik\Omega m}. \tag{10}$$

Умножая правую и левую части уравнения (9) на $e^{-i\nu\Omega l}$ и суммируя по l в пределах от $l=0$ до $l=N$ с учетом (6) и (10), находим

$$c^2\mu_\nu\,(\varepsilon) + \overline{|c_{\varphi\nu}|^2}\,\mu_\nu\,(\varepsilon)(N+1) = \overline{c_{н\nu}\,c^*_{\varphi\nu}}\,(N+1),$$

откуда

$$\mu_\nu\,(\varepsilon) = \frac{(N+1)\,\overline{c_{н\nu}\,c^*_{\varphi\nu}}}{c^2 + (N+1)\,\overline{|c_{\varphi\nu}|^2}}. \tag{11}$$

Из (11) и (9) получаем искомое выражение весовой функции оптимального дискретного фильтра:

$$K\,[m,\,\varepsilon] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{c_{н\nu}\,c^*_{\varphi\nu}}\, e^{i\nu\Omega\,(m+\varepsilon)}}{c^2 + \overline{|c_{\varphi\nu}|^2}\,(N+1)}. \tag{12}$$

Коэффициенты разложения $c_{н\nu}$, $c_{\varphi\nu}$ функции $H[n,\varepsilon]$ и функции $\varphi[n]$ имеют простую связь с заданными коэффициентами разложения $c_{s\nu}$, $c_{p\nu}$ сигнала и помехи. Поэтому легко находятся и статистические моменты $\overline{c_{н\nu}\,c^*_{\varphi\nu}}, \overline{|c_{\varphi\nu}|^2}$, входящие в (12). Действительно, согласно (4) и (5), $c_{\varphi k} = c_{sk} + c_{pk}$, $c_{нk} = c_{sk}\,e^{-ik\Omega\bar{t}}\,(he^{ik\Omega\bar{t}})$ при $\bar{t} = n+\varepsilon$.

Таким образом, полученное выражение (12) просто определяет оптимальную весовую функцию дискретного фильтра для воспроизведения либо линейного преобразования произвольного периодического сигнала на фоне помех. Этим определяется оптимальная процедура фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Перов. Статистический синтез импульсных систем.— Труды I Международного конгресса ИФАК, т. II. М., 1961.
2. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.

Поступило в редакцию 27 апреля 1972 г.