АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1973

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 518.12

А. В. БЕЛЯЕВ, Г. И. СКРЫПНИК
(Москва)

ЗАМЕЧАНИЯ О СТРУКТУРЕ ПРОЦЕДУРЫ КАЛМАНА И РЕКУРРЕНТНОМ МЕТОДЕ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

Известно [1], что независимо от критерия оптимальности можно дать описание непрерывных фильтров Заде и Калмана в классической (квадратурной) форме с помощью матрицы весовых функций или в виде системы дифференциальных уравнений. Основная трудность, возникающая при реализации данных представлений, состоит в выполнении операции обращения ковариационных матриц. В первом случае необходимо обращать матрицу порядка n размерности вектора состояния динамической системы, а во втором — матрицу ошибок наблюдения размерности $p \times p$.

Указанные свойства и особенности реализации оптимальных систем Заде и Калмана сохраняются и при их рассмотрении в дискретном времени (см., например, [2, 3]). При этом фильтр Заде для некоррелированных помех и классический метод «наименьших квадратов» дают полностью эквивалентный результат, что является следствием известной теоремы Гаусса — Маркова из линейного регрессионного анализа [4]. Дифференциальному описанию фильтров, имеющему место в непрерывном времени, в дискретном случае соответствует рекуррентная процедура динамической фильтрации Калмана — Бьюси [5, 6].

Следуя [3], рассмотрим дискретную систему

$$x_k = \Phi x_{k-1} + B q_{k-1}; \quad k = 1, \ldots, N; \quad E\{x_0\} = 0, \quad E\{x_0 x_0^*\} = F, \tag{1}$$

где x_k — n-мерный вектор состояний в момент времени t_k; Φ и B — известные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times l$ соответственно; q_k — вектор случайных возмущений с нулевым математическим ожиданием $E(q_k) = 0$ и ковариационной матрицей $E\{q_k q_j^*\} = Q\delta_{kj}$; звездочкой обозначена операция транспонирования. Вектор наблюдения формируется соотношением

$$z_k = H x_k + r_k, \tag{2}$$

где r_k — вектор помехи размерности p с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами:

$$E\{r_k r_j^*\} = R\delta_{kj}, \quad E\{r_k q_j^*\} = 0$$

(H — матрица наблюдения размерности $p \times n$). Тогда уравнения Калмана для оптимальной оценки $\hat{x}_k$ приобретают вид:

$$\hat{x}_k = \Phi \hat{x}_{k-1} + K_k (z_k - H\Phi\hat{x}_{k-1}); \quad M_k = [P_k^{-1} + H^* R^{-1} H]^{-1}; \quad K_k = M_k H^* R^{-1};$$
$$P_k = \Phi M_{k-1} \Phi^* + BQB^*; \quad k = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

С помощью этой процедуры можно дать описание дискретному фильтру Калмана и Заде, если в качестве начальных значений соответственно принять:

$$1)\ P_0 = F,\ \hat{x}_0 = 0; \quad 2)\ P_0^{-1} = 0,\ \hat{x}_0 \text{ — произвольно; } \det H^* R^{-1} H \neq 0.$$

Из формы записи (3) следует, что реализация процедуры Калмана зависит от способа обращения матриц P_k, $P_k^{-1} + H^* R^{-1} H = M_k^{-1}$ размерности $n \times n$. Для этой цели, в частности, можно было бы использовать классические процедуры обращения матриц в гауссовой или жордановой форме. Однако при этом терялось бы преимущество рассматриваемого метода по сравнению с классическим способом обработки информации. В этой связи решение данной частной задачи осуществляется в процедуре Калмана на основе следующего матричного тождества *:

$$M_k = [P_k^{-1} + H^*R^{-1}H]^{-1} \equiv P_k - P_kH^*[HP_kH^* + R]^{-1}HP_k, \tag{4}$$

справедливого при $\det M_k^{-1} \neq 0$, $\det P_k \neq 0, \infty$; $\det [HP_kH^* + R] \neq 0$. Заметим, что тождество (4) не может быть непосредственно использовано для решения задачи Заде, поскольку $P_0^{-1}=0$. При $p<n$ соотношение (4) позволяет обращение матрицы высшего порядка свести к обращению матриц низшего порядка, являющихся частью основной матрицы. Такие способы построения названы в [9] методами разбиения на клетки. Если в тождестве (5) выбрать матрицу $D-CA^{-1}B$ размерности 1×1 и тем самым свести операцию обращения к делению на число и, кроме того, в начальный момент A^{-1} считать известной, то с помощью указанных методов можно построить различные рекуррентные процедуры, дающие на конечном этапе обращение заданной матрицы. Примером подобного метода обращения ковариационных матриц применительно к рассматриваемой проблеме фильтрации может служить процедура, приведенная в [6] на стр. 69.

Сформулируем, исходя из соотношения (5), один из возможных способов обращения матрицы общего вида. Пусть требуется обратить матрицу

$$A = \{a_{ik}\}, \quad i, k = 1 \dots n, \quad \det A \neq 0.$$

Введем следующие обозначения: $\widetilde{A} = A - \varkappa I$; $\Delta B_i = e_i\widetilde{a}_i$, $\Delta C_i = le_ie_i^*$. Здесь $\varkappa$, l — действительные числа, I — единичная матрица $n\times n$; $\widetilde{a}_i = (\widetilde{a}_{i1}, \dots, \widetilde{a}_{in})$, $e_i = \{\delta_{ki}\}$, $k = 1 \dots n$, и δ_{ik} — символ Кронекера. Если на каждом шаге существует необходимое обращение и $\varkappa \neq l$, то следующая процедура дает решение поставленной задачи:

$$\widetilde{B}_0 = (\varkappa - l)I, \qquad \widetilde{B}_0^{-1} = \frac{1}{\varkappa - l} I;$$

$$\widetilde{B}_1 = \widetilde{B}_0 + \Delta B_1; \qquad \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{B}_N = \widetilde{B}_{N-1} + \Delta B_N; \qquad \widetilde{B}_N^{-1} = (\widetilde{B}_{N-1} + e_N\widetilde{a}_N)^{-1} = \widetilde{B}_{N-1}^{-1} - \frac{\widetilde{B}_{N-1}^{-1}e_N\widetilde{a}_N\widetilde{B}_{N-1}^{-1}}{1 + \widetilde{a}_N\widetilde{B}_{N-1}^{-1}e_N}; \quad 1 \leqslant N \leqslant n; \tag{9}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{B}_n = \widetilde{B}_{n-1} + \Delta B_n \equiv A - lI; \qquad \widetilde{B}_n^{-1} = (A - lI)^{-1};$$

$$\widetilde{B}_{n+1} = \widetilde{B}_n + \Delta C_1; \qquad \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{B}_{n+r} = \widetilde{B}_{n+r-1} + \Delta C_r; \qquad \widetilde{B}_{n+r}^{-1} = (\widetilde{B}_{n+r-1} + le_re_r^*)^{-1} = \widetilde{B}_{n+r-1}^{-1} -$$

---

* Следует отметить (см. [7]), что матричное тождество

$$[A-BD^{-1}C]^{-1} \equiv A^{-1} + A^{-1}B[D-CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1}, \tag{5}$$

лежащее в основе равенства (4), есть в свою очередь последовательность хорошо известных формул обращения блочных матриц

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$E = A^{-1} + A^{-1}BHCA^{-1}; \; F = -A^{-1}BH = -EBD^{-1}; \; G = -HCA^{-1} = -D^{-1}CE;$$
$$H = [D-CA^{-1}B]^{-1} = D^{-1} + D^{-1}CEBD^{-1}. \tag{7}$$

Эквивалентность (6) легко проверяется, если существуют все необходимые обращения. Аналогично два уравнения для детерминанта блочной матрицы следуют из умножения ее слева на

$$\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$$

соответственно. Так как детерминант блочно-диагональной матрицы после преобразования есть произведение детерминантов блоков на диагонали, следует другое известное тождество:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det = (D)\det(A - BD^{-1}C) = \det(A)\det(D - CA^{-1}). \tag{8}$$

Указанные соотношения часто используются в литературе, и Bodewig [8] приписывает их Schur и Frobenius.

$$-\frac{l\widetilde{B}_{n+r-1}^{-1}\, e_r\, e_r^{*}\, \widetilde{B}_{n+r-1}^{-1}}{1 + l e_r^{*}\, \widetilde{B}_{n+r-1}^{-1}\, e_r}; \qquad 1 \leqslant r \leqslant n; \quad (10)$$

. . . .

$$\widetilde{B}_{2n} = \widetilde{B}_{2n-1} + \Delta C_n \equiv A; \qquad \widetilde{B}_{2n}^{-1} = A^{-1}.$$

Здесь слева указан способ формирования матриц $A-lI$ и A соответственно на n-м и $2n$-м шаге, а справа дана рекуррентная процедура их обращения. Из общих алгебраических представлений следует, что эта процедура не может быть реализована лишь на дискретном множестве $L(\varkappa)$ значений параметра $l \in L(\varkappa)$, число элементов кото-
$\varkappa - 1(\varkappa - 1)$ и оборвать процедуру на n-м шаге.

Пример. Обратим с помощью введенной рекуррентной процедуры матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которой, как отмечено в [10], классический метод Гаусса не дает положительного результата. Положим $\varkappa = 1$, $l = 2$. Тогда

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{a}_1 = (-1 \;\; 1); \quad \widetilde{a}_2 = (1 \;\; -1); \quad \Delta B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и процедура (9), (10) приобретает вид:

$$\widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{B}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{B}_3^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{B}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Предлагаемый рекуррентный метод обращения матрицы общего вида (так же, как и процедура динамической фильтрации) по своей структуре легко реализуем на ЭВМ.

В заключение заметим, что для решения задачи обращения матриц в процедуре Калмана (3) можно применять при $BQ \neq 0$ нерекурсивные, алгебраические выражения, полученные в [3]. Можно также использовать соотношения (6) — (8). Указанные выражения в сочетании с методом разбиения на клетки, по всей видимости, позволят построить новые рекуррентные процедуры обращения матриц общей структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Скрыпник, А. В. Беляев. К теории оптимальной линейной фильтрации.— Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, № 2.
2. Б. А. Резников. О двух матричных формах оценок параметров движения космических аппаратов.— Космические исследования, 1966, т. 4, № 1.
3. D. R. Vaughan. Nonrecursive Algebraie Solution for the Discrete Riccati Egration.— IEEE Trans. on Autom. Control, Oktober, 1970, v. AC-15, № 5.
4. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
5. Р. Бьюси. Линейная и нелинейная фильтрация.— ТИИЭР, 1970, т. 58, № 6.
6. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966.
7. T. E. Fortmann. A Matrix Imversion Identity.— IEEE Trans. on Autom. Control, Oktober, 1970, v. AC-15, № 5.
8. E. Bodewig. Matrix Calculus. Amsterdam, The Netherlands, North-Holland, 1959.
9. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, ч. II. М., Физматгиз, 1960.
10. Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М., «Наука», 1970.

Поступила в редакцию 3 июля 1972 г.