УДК 621.372.061.3

Ю. Д. СВЕРКУНОВ

(Москва)

АНАЛИЗ СПЕКТРА НА ВЫХОДЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЖЕСТКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ПРИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В ряде радиотехнических задач необходимо произвести анализ спектра колебаний на выходе нелинейной системы (НС) при гармоническом воздействии на ее вход. При этом НС имеет «гладкую» характеристику, т. е. задана функцией всюду аналитической на вещественной оси, которая, следовательно, может быть представлена своим рядом Тейлора. В частном случае характеристика может быть задана конечным рядом, т. е. степенным полиномом.

Введем следующие обозначения. Пусть входное воздействие $u_{вх}=U_0+u_{\sim}=U_0+\sum_{i=1}^{n} U_i\cos(\omega_i t+\varphi_i)$, где U_0 фактически означает выбранную рабочую точку нелинейного элемента. Характеристика нелинейного элемента $f(u_{вх})$ представляется рядом Тейлора с конечным числом членов

$$f(u_{вх})=\sum_{i=0}^{m} k_i u_{\sim}^{i}, \tag{1}$$

где $k_i=\frac{f^{(i)}(U_0)}{i!}$; $f^{(i)}(U_0)$ — производная i-го порядка в выбранной рабочей точке.

Любую комбинационную частоту (КЧ), например $b_1\omega_1+b_2\omega_2+\ldots$ $\ldots+b_n\omega_n$, при воздействии на вход суммы n синусоидальных сигналов удобно задать набором коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, принимающих значения целых положительных и отрицательных чисел, а также нулей. Тогда для мгновенного значения напряжения такой частоты в [1] получена формула

$$u_{[b_1,\ldots,b_n]}=$$
$$=\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-q}{2}\right]}\frac{k_{q+2s}}{2^{q+2s-1}}(q+2s)!\sum_{i=1}^{C_{s+n-1}^{n-1}}\frac{U_1^{2a_{1_i}^{(s)}+|b_1|}\ldots U_n^{2a_{n_i}^{(s)}+|b_n|}}{a_{1_i}^{(s)}!\ldots a_{n_i}^{(s)}!\left(a_{1_i}^{(s)}+|b_1|\right)!\ldots\left(a_{n_i}^{(s)}+|b_n|\right)!}\times$$
$$\times\cos[(b_1\omega_1+\ldots+b_n\omega_n)t+\varphi], \tag{2}$$

где $a_{1_i}, a_{2_i}, \ldots, a_{n_i}$ — i-е разбиение величины s на n целых неотрицательных слагаемых; $[d]$ — целая часть d; $q=\sum_{i=1}^{n}|b_i|$ — порядок данной КЧ; $\varphi=b_1\varphi_1+b_2\varphi_2+\ldots+b_n\varphi_n$ — фаза.

Заданная КЧ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ порядка q содержится в спектре выходного сигнала только в том случае, если имеется хотя бы одно $k_m\neq0$ при $m\equiv q \pmod 2$ и $m\geqslant q$ [1].

В [2] на основании формулы (2) получен ряд соотношений между компонентами спектра на выходе НС, заданной рядом Тейлора или степенным полиномом со знакопостоянными коэффициентами. В частности, доказано свойство монотонного уменьшения амплитуд КЧ на выходе такой НС с ростом их порядка, которое можно записать в следующем виде:

$$U_{[b_1,\ldots,b_{j+2p},\ldots,b_n]} < U_{[b_1,\ldots,b_j,\ldots,b_n]}, \qquad (3)$$

где p — целое число, лежащее в пределах $1 \leqslant p \leqslant \left[\frac{m-q}{2}\right]$; $q=\sum_{i=1}^{n}|b_i|$. В случае бесконечного ряда $1 \leqslant p < \infty$.

Указанные результаты относятся, в частности, к НС с характеристикой, которую по аналогии с характеристикой пружины будем называть мягкой. Характеристика пружины $y=f(u_{вх})$, где $u_{вх}$ — величина приложенной или возвращающей силы, а y — растяжение, называется мягкой, если $|y'|$ является возрастающей функцией $|u_{вх}|$, и жесткой, если $|y'|$ — монотонно убывающая функция $|u_{вх}|$. Представляет интерес произвести подобный анализ для НС с жесткой характеристикой. Такие характеристики описываются, например, функциями $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{th} x$, $y=\operatorname{Arsh} x$.

Заметим, что нечетная аналитическая на всей вещественной оси функция $f(x)$, для которой $|f'(x)|$ является монотонно убывающей при $x>0$, должна обязательно описываться рядом Тейлора с бесконечным числом перемен знаков у коэффициентов ряда. Действительно, этот ряд не может быть конечным, т. е. многочленом, так как в этом случае поведение $f'(x)$ при $x \to \infty$ будет определяться членом высшей степени, и, следовательно, $|f'(x)| \to \infty$. По этой же причине число перемен знака коэффициентов ряда должно быть бесконечным. Приведенные выше функции удовлетворяют этим условиям. В частности, они описываются знакопеременными рядами. Поэтому будем рассматривать характеристику НС, описываемой знакопеременным рядом.

Итак, предположим, что характеристика НС $f(x)$ разлагается относительно точки $x=0$ в ряд Маклорена, сходящейся к $f(x)$ по крайней мере в окрестности $x=0$.

$$f(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{f^{(2s+1)}(0)}{(2s+1)!}x^{2s+1}=\sum_{s=0}^{\infty}k_{(2s+1)}x^{2s+1}, \qquad (4)$$

где $f^{(2s+1)}(0)=(-1)^s|f^{(2s+1)}(0)|$, т. е. для определенности предположим $f(x)$ монотонно возрастающей в окрестности $x=0$. Докажем предварительно теорему о свойстве таких функций.

Теорема. Для того чтобы ряд Маклорена нечетной функции $f(x)$, аналитической в точке $x=0$, был знакопеременным, необходимо, чтобы все ее нечетные производные $f^{(2l+1)}(x)$ в окрестности $x=0$ были функциями, монотонно убывающими по модулю при $x>0$.

Действительно, в пределах радиуса сходимости ряда для производной $f(x)$ порядка $(2l+1)$, где $l=0, 1, 2, \ldots$, получим

$$f^{(2l+1)}(x)=\sum_{s=l}^{\infty}\frac{f^{(2s+1)}(0)}{(2s+1)!}(2s+1)\,2s\ldots[2(s-l)+1]\,x^{2(s-l)}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{f^{(2s+2l+1)}(0)}{(2s)!}x^{2s}. \qquad (5)$$

По условию теоремы исходный ряд функции $f(x)$ является знакопеременным. Тогда, каковы бы ни были соотношения между величинами $|k_{(2s+1)}|$ $(s=\overline{0,\infty})$ при достаточно малом x,

$$\frac{|k_{(2s+3)}|\,x^{2x+3}}{|k_{(2s+1)}|\,x^{2s+1}}=\frac{|k_{2s+3}|}{|k_{(2s+1)}|}x^2 \leqslant 1. \qquad (5')$$

Обозначив x_s величину x, при которой для данного s выполняется равенство в $(5')$, рассмотрим $\inf\limits_{s} x_s = x_s'$; $x_s' > 0$, так как по условию $|k_{(2s+1)}|>0$ для всех $s=\overline{0, \infty}$. Тогда в окрестности $x=0$ при $x<x_s'$ ряд (4) будет рядом лейбницевского типа. Аналогичные рассуждения справедливы также и для ряда (5). Поэтому при $x=0$ его сумма равна $f^{(2l+1)}(0)$, тогда как при $x=0$ и лежащем в окрестности нуля $|f^{(2l+1)}(x)|<|f^{(2l+1)}(0)|$, что следует из свойства рядов лейбницевского типа. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что без ограничения общности можно считать, что последовательность $|k_{(2s+1)}|$ $(s=\overline{0, \infty})$ является сительно точек $x\neq 0$, то по крайней мере в окрестности $x=0$ все коэффициенты ряда Тейлора падают с ростом $|x|$, а это, в свою очередь, означает уменьшение амплитуд КЧ с ростом постоянной составляющей u_0 входного сигнала.

Покажем, при каких условиях спектр нечетных гармоник и КЧ на выходе исследуемой НС является монотонно убывающим. Для этого рассмотрим первоначально спектр высших гармоник системы, на вход которой поступает сигнал только одной частоты, т. е. $u_{\text{вх}\sim}=U_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$. Попутно опишем и другие особенности спектра таких систем.

Амплитуды спектральных составляющих для нечетных гармоник из формулы (2) можно записать так:

$$|U_{2m+1}|=\left|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k_{2l+2m+1}}{2^{2l+2m}}\frac{(2l+2m+1)!}{l!\,(l+2m+1)!}U_1^{2l+2m+1}\right|=\left|\sum_{l=0}^{\infty}U_{[2m+1]}^{(2l+2m+1)}\right|. \qquad (6)$$

Выражение для мгновенного значения $[2m+1]$-й гармоники имеет вид

$$u_{[2m+1]}=U_{[2m+1]}\cos[(2m+1)\omega_1 t+(2m+1)\varphi]. \qquad (7)$$

В пределах радиуса сходимости ряда Тейлора функции $f(x)$ выражение для $U_{[2m+1]}$ по крайней мере для слабого сигнала $U_m<1$ — ряд лейбницевского типа, который является всегда сходящимся. Поэтому если коэффициенты k_{2m+1} знакопеременны, то и $u_{[2m+1]}$ будет также знакопеременной при изменении m.

Учитывая, что $k_1>0$, $U_{[2m+1]}=(-1)^m|U_{[2m+1]}|$. В частности, при $\varphi_1=-\pi/2$, т. е. $u_{\text{вх}\sim}=U_1\sin\omega_1 t$, имеем

$$u_{[2m+1]}=|U_{[2m+1]}|\sin(2m+1)\omega_1 t. \qquad (8)$$

Последнее соотношение характеризует интересную особенность спектра НС, характеризуемой знакопеременным рядом. В моменты прохождения через нулевой уровень входного колебания $u_{\text{вх}\sim}=U_1\sin\omega_1 t$ периодически с периодом $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ через нулевой уровень проходят колебания всех спектральных составляющих, с производной одного и того же знака, т. е. имеет место совпадение «нулей» колебаний. В случае же ряда с положительными членами при $u_{\text{вх}\sim}=U_1\cos\omega_1 t$ получим

$$u_{[2m+1]}=|U_{[2m+1]}|\cos(2m+1)\omega_1 t, \qquad (9)$$

т. е. происходит совпадение максимумов всех колебаний спектра с максимумом входного сигнала. Совпадения же «нулей» с одинаковыми производными в последнем случае нет. Заметим попутно, что аналогичное свойство спектра на выходе НС сохраняется и при $n>1$, так как при этом справедливы все те же рассуждения, которые были использованы для получения выражения (8).

Покажем теперь, что амплитудный спектр гармоник на выходе исследуемой НС является монотонно падающим.

Из выражения (6) нетрудно установить, что $\left|U_{[2m+3]}^{(2l+2m+3)}\right| < \left|U_{[2m+1]}^{(2l+2m+3)}\right|$ и, следовательно, для принятых ограничений $\left|U_{[2m+3]}^{(2l+2m+3)}\right| < \left|U_{[2m+1]}^{(2l+2m+1)}\right|$. Поэтому

$$|U_{[2m+1]}| - |U_{[2m+3]}| = \left|\sum_{l=0}^{\infty} U_{[2m+1]}^{(2l+2m+1)}\right| - \left|\sum_{l=0}^{\infty} U_{[2m+3]}^{(2l+2m+3)}\right| > 0.$$

Таким образом, монотонное убывание амплитуд высших гармоник с ростом их порядка доказано.

Для аналогичного доказательства в общем случае нам понадобится представление амплитуды КЧ $[b_1, \ldots, b_n]$ на выходе параболы степени $q+2s$, $U_{[b_1,\ldots,b_n]}^{(q+2s)}$ через КЧ более низкого порядка, полученное в [3]:

$$U_{[b_1,\ldots,b_n]}^{(q+2s)} = \sum_{j=0}^{s} \frac{U_p^{|b_p|+2j}}{j!\,(j+|b_p|)!} U_{[b_1',\ldots,b_{n-1}']/|b_p|+2j}^{(q_{n-1}+2s-2j)}, \tag{10}$$

где $U_{[b_1',\ldots,b_{n-1}']/|b_p|+2j}^{(q_{n-1}+2s-2j)}$ — амплитуда КЧ $[b_1', \ldots, b_{n-1}']$ на выходе параболы степени $q_{n-1}+2s-2j$ с коэффициентом пропорциональности

$$k_{q_{n-1}+2s-2j+|b_p|+2j} = k_{q+2s};\ [b_1', \ldots, b_{n-1}'] =$$

$$=[b_1, \ldots, b_{p-1},\ b_{p+1}, \ldots, b_n];\ q_{n-1} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} |b_i|;\ \ p \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Формула (10) представляет заданную КЧ через множество КЧ с уменьшенным на единицу числом входных сигналов и взятых на выходе определенных парабол степеней не больших исходной. Разложение (10) может быть снова применено к каждой из $s+1$ амплитуд, стоящих в правой части, с выделением любой из оставшихся входных амплитуд $U_i (i=\overline{1,\ n};\ \ i\neq p)$; в результате получим выражение исходной амплитуды через новое множество амплитуд с $n-2$ входными сигналами и т. д. [3].

Для произвольной амплитуды $|U_{[b_1 \ldots,\ b_n]}|$, воспользовавшись формулой (10) последовательно $n-1$ раз и принимая соответственно $p=n$, $n-1, \ldots, 2$, получим

$$U_{[b_1,\ldots,b_n]} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{s} \sum_{j_2=0}^{s-j_1} \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{s-\sum_{i=1}^{n-2} j_i} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{U_{n-k+1}^{|b_{n-k+1}|+2j_k}}{j_k!\,(j_k+|b_{n-k+1}|)!} U_{[b_1]/\sum_{i=2}^{n}|b_i|+2\sum_{i=1}^{n-1} j_i}^{(2s+b_1-2\sum_{i=1}^{n-1} j_i)}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь амплитуды КЧ, которая может быть получена путем увеличения одного из коэффициентов на две единицы. Без ограничения общности можно рассмотреть $U[b_1+2, \ldots, b_n]$, полагая, что $b_1 \geqslant 0$. Аналогично имеем

$$U_{[b_1+2,\ldots,b_n]} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{s-\sum_{i=1}^{n-2} j_i} \prod_{k=1}^{n-2} \frac{U_{n-k+1}^{|b_{n-k+1}|+2j_k}}{j_k!\,(j_k+|b_{n-k+1}|)!} U_{[b_1+2]/\sum_{i=2}^{n}|b_i|+2\sum_{i=1}^{n-1} j_i}^{\left(2s+|b_1|+2-2\sum_{i=1}^{n-1} j_i\right)}. \tag{12}$$

Учитывая, что $U_{[b_1]/\sum_{i=2}^{n}|b_i|+2\sum_{i=1}^{n-1} j_i}^{(2s+b_1-2\sum_{i=1}^{n-1} j_i)} = U_{[b_1]}^{(2s+b_1-2\sum_{i=1}^{n-1} j_i)}$ на выходе параболы с коэффициентом пропорциональности $k_{2s+\sum_{i=1}^{n}|b_i|}$, а

$$U^{\left(2s+b_1+2-2\sum_{i=1}^{n-1} j_i\right)}_{[b_1+2]/\sum_{i=2}^{n}|b_i|+2\sum_{i=1}^{n-1} j_i} = U^{\left(2s+b_1+2-2\sum_{i=1}^{n-1} j_i\right)}_{[b_1+2]} \quad \text{при } k_{2s+\sum_{i=1}^{n}|b_i|+2},$$

и принимая во внимание ранее полученное из выражения (6) неравенство, легко показать, что если $\sum_{i=1}^{n}|b_i| = q$ нечетно, то

$$|U_{[b_1,\ldots,b_n]}| - |U_{[b_1+2,\ldots,b_n]}| > 0. \tag{13}$$

Таким образом, показано, что и в общем случае имеет место монотонное уменьшение амплитуд КЧ с ростом их порядка, если такое повышение порядка производится путем увеличения по абсолютной величине любого из коэффициентов исходной произвольной КЧ нечетного порядка. Это свойство полностью аналогично полученному ранее для НС, описываемых знакопостоянными рядами для коэффициентов одинаковой четности.

Данный результат был получен для случая отсутствия на входе НС постоянной составляющей $U_0=0$. Покажем, что это справедливо и в общем случае. Для этого необходимо доказать, что последовательность производных $f^{(2l+1)}(x_0)$ при $x_0 \neq 0$ также является знакопеременной. Справедливость этого утверждения в окрестности $x=0$ следует из аналитичности функции $f(x)$, благодаря чему все ее производные являются непрерывными функциями. Однако данное утверждение может быть усилено.

Как известно, ряд Тейлора любой производной функции $f^{(2l+1)}(x)$ (5) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд функции $f(x)$, и сходится к самой функции $f^{(2l+1)}(x)$. Следовательно, для любого l ряд (5) при $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$ является сходящимся к $f^{(2l+1)}(x_0)$. Значит, это ряд лейбницевского типа, и знак его суммы определяется знаком первого числа. Тем самым знакопеременность последовательности $f^{(2l+1)}(x_0)$ ($l=0, 1, 2, \ldots$) доказана.

В целях дальнейшего анализа свойств спектра на выходе рассматриваемой НС запишем выражение (11) для частного случая $[b_1, b_2] = [2m+1, 0]$ и просуммируем по s.

$$|U_{[2m+1,0]}| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_2^{2j}}{(j!)^2} U_{[2m+1/2j]}\right|. \tag{14}$$

Для анализируемой системы $U_{[2m+1]/2j} = (-1)^{m+j}|U_{[2m+1]/2j}|$. Воспользовавшись сочетательным свойством сходящихся рядов, объединим члены ряда (14) по два, начиная со второго. Получим новый ряд, у которого все члены, начиная со второго, имеют один и тот же знак, противоположный знаку первого члена. Отсюда очевидно, что $|U_{[2m+1,0]}| < |U_{[2m+1]}|$ и с возрастанием U_2 по крайней мере в области малых U_2 неравенство усиливается, т. е. $U_{[2m+1,0]}$ монотонно уменьшается. Таким образом, имеет место подавление гармоник одной частоты с ростом амплитуды входного сигнала на второй частоте. В заключение остановимся на использовании полученных свойств спектра. Большинство методов автоматического распознавания шумов различных машин и механизмов, связанных, в частности, с оценкой шумности механизма или с определением неисправностей, основано на спектральном анализе излучаемого акустического сигнала. При этом в ряде случаев гармонические сигналы работающих механизмов излучаются после их прохождения через нелинейные системы или сами излучатели являются нелинейными. Поэтому представляет интерес выявление общих закономерностей и соотношений между компонентами спектра на выходе НС при гармоническом воздействии.

Полученные результаты позволяют значительно упростить анализ спектра, в частности они позволяют получить оценки амплитуд КЧ без их измерения посредством определения только амплитуд высших гармоник $U_{[2m+1,0]}$, $U_{[0,2m+1]}$ и КЧ вида $U_{[2m+1,1]}$, $U_{[1,2m+1]}$ посредством использования неравенства (13). Кроме того, в ряде случаев они позволяют получить описание нелинейной системы по наблюдаемому спектру, что, в свою очередь, позволяет производить акустический контроль неисправности механизма.

Доказанное свойство монотонного уменьшения амплитуд КЧ с ростом их порядка можно использовать при автоматическом анализе спектра сигнала, позволяя правильно принять решение о прекращении анализа для амплитуд КЧ более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Сверкунов. К анализу спектра на выходе нелинейной системы.— Радиотехника, 1972, № 8.
2. Ю. Д. Сверкунов. Некоторые отношения между компонентами спектра при гармоническом воздействии.— Метрология, 1973, № 4.
3. Ю. Д. Сверкунов. К анализу спектра акустических сигналов на выходе нелинейной системы при воздействии суммы гармонических источников. — Кибернетическая диагностика механических систем по виброакустическим процессам. Материалы Всесоюзного симпозиума. Каунас, 1972.

Поступила в редакцию 14 июля 1971 г.,
окончательный вариант — 13 декабря 1972 г.

УДК 681.3 : 513/516

А. М. АРУТЮНЯН

(Иркутск)

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАСТРА В ПЕРЦЕПТРОНЕ С ПЕРЕДАЮЩЕЙ ТЕЛЕВИЗИОННОЙ ТРУБКОЙ

Введение. В [1] предложен принцип построения и техническая реализация перцептрона с передающей телевизионной трубкой.

Пусть перцептрон обучен распознаванию некоторого образа и ему предъявлено изображение данного образа, расположенного случайно на поле рецепторов (растре). Тогда под воздействием управляющего устройства параметры напряжений (токов) отклоняющих элементов передающей телевизионной трубки можно изменять так, чтобы проекция изображения заняла положение на растре, при котором осуществлялось обучение.

Очевидно, если питать отклоняющую систему передающей телевизионной трубки соответствующими напряжениями (токами), то можно осуществить проективное преобразование поля рецепторов (растра).

Реализация такого рода преобразований с помощью питающих напряжений (токов) передающей телевизионной трубки рассматривается в настоящей работе.