А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 6 1973

МЕТОДЫ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 621.317.7.083.92.088

В. Ф. МЕЛЕХИН, В. И. ТАРАБУКИН

(Ленинград)

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ В КОД

При преобразовании длительности стабильных периодически повторяющихся временных интервалов в код с помощью периодической последовательности счетных импульсов погрешность измерения с использованием усреднения существенно зависит от соотношения периодов измеряемого и квантующего процессов и числа усреднений. Исследование этой зависимости производится в настоящей работе. Цель такого исследования — выявление методов организации измерительного процесса, позволяющих уменьшить ошибку преобразования. Эта задача актуальна при измерении частоты, фазового угла стабильных процессов и др.

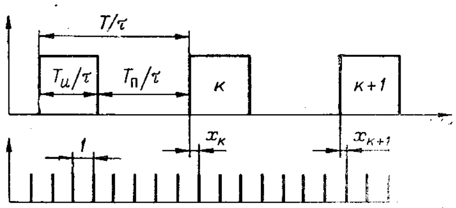

Рис. 1.

Будем рассматривать многократное преобразование периодического временного интервала в код. На рис. 1 изображена последовательность импульсов длительностью $T_и$ и периодом T, причем $T_и/\tau \geqslant 1$, $T_п/\tau = (T - T_п)/\tau \geqslant 1$ и, следовательно, $T/\tau \geqslant 2$. Очевидно, ошибка k-го преобразования оценивается значением начальной фазы k-го преобразования x_k, определенной, как показано на рис. 1. Введем обозначения: Ц(x) — целая часть числа x; $\{x\}$ — дробная часть числа x, равная расстоянию от x до ближайшего целого, не превосходящего x. При этом $\{-x\} = 1 - \{x\}$. Можно показать, что начальные фазы последовательных преобразований образуют неслучайную последовательность

$$x_k = \left\{x_1 + \left(1 - \frac{m}{p}\right)(k-1)\right\} = \left\{x_1 + \frac{\alpha}{p}(k-1)\right\}, \qquad (1)$$

где x_1 — начальная фаза первого преобразования; $\frac{m}{p} = \left\{\frac{T}{\tau}\right\}$. Соотношение (1) по существу совпадает с выражениями для последовательности начальных фаз, полученными в [1, 2], если в последних учесть начальные условия. Из (1) видно, что последовательность x_k периодическая с периодом, равным p. Элементы последовательности принимают значения из интервала [0, 1], а характер последовательности зависит от соотношения $\frac{m}{p} = \left\{\frac{T}{\tau}\right\}$.

Абсолютная ошибка измерения длительности k-го импульса, очевидно, может принимать только два значения:
ют два возможных результата в счетчике импульсов при измерении длительности k-го импульса:

$$F_{\text{сч}}^{k} = \begin{cases} c+1, & \text{если } \left\{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}\right\} > x_k; \\ c, & \text{если } \left\{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}\right\} < x_k, \end{cases} \tag{3}$$

где $c = \text{Ц}\left(\frac{T_{\text{и}}}{\tau}\right)$.

Таким образом, зная последовательность x_k, можно определить последовательные значения Δ_k и $F_{\text{сч}}^{k}$ и, следовательно, полностью описать процесс преобразования периодических временных интервалов в код. В частных случаях, когда длительность импульса кратна шагу квантования $\left(\left\{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}\right\} = 0\right)$, $\Delta_k = 0$, а когда период измеряемого процесса кратен шагу квантования $\left(\left\{\frac{T}{\tau}\right\} = 0\right)$, $x_k = x_{k-1} = \ldots = x_1 = \text{const}$ и, следовательно, $\Delta_k = \Delta_{k-1} = \ldots = \Delta_1 = \text{const}$.

В общем случае Δ_k представляет собой последовательность, элементы которой принимают значения Δ_1 или Δ_2 в зависимости от значения элементов последовательности x_k, и вследствие периодичности последовательности x_k последовательности Δ_k и $F_{\text{сч}}^{k}$ обладают также свойством периодичности с периодом, равным p.

Для результата преобразования с использованием усреднения может быть записано следующее очевидное равенство (в относительных единицах $\frac{T_{\text{и}}}{\tau}$):

$$\frac{T_{\text{и}}}{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F_{\text{сч}}^{k}. \tag{4}$$

Выносся целое C за знак суммы, (4) можно записать в виде

$$\frac{T_{\text{и}}}{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) + C,$$

где

$$f(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left\{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}\right\} > x_k; \\ 0, & \text{если } \left\{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}\right\} < x_k. \end{cases}$$

Обозначив $\left\{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}\right\} = \frac{a}{b}$ и учитывая, что истинное значение длительности импульса $T_{\text{и}}$ равно $C + a/в$, для погрешности преобразования можно записать:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) - \frac{a}{b}. \tag{5}$$

Представим величину a/b в виде интеграла

$$\frac{a}{b} = \int_0^1 f(x)\,dx, \tag{6}$$

где

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } \frac{a}{b}<x<1;\\ 1, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant \frac{a}{b}.\end{cases} \tag{7}$$

Тогда для погрешности преобразования можно записать

$$R=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)-\int_0^1 f(x)\,dx. \tag{8}$$

Выражение (8) для погрешности преобразования с использованием усреднения совпадает с выражением для погрешности квадратурной формулы, используемой для приближенного вычисления интеграла от функции, заданной условием (7). При этом сетка интегрирования задается последовательностью начальных фаз единичных преобразований x_k.

Согласно [3], эта погрешность удовлетворяет равенству

$$R=\frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' C(m)\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i m x_k}, \tag{9}$$

где $C(m)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, определенной согласно (7);

$$C(m)=\int_0^1 f(x)\,e^{-2\pi i m x}dx; \tag{10}$$

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} C(m)\,e^{2\pi i m x}; \tag{11}$$

x_k — координаты точек сетки интегрирования. Знак Σ' в (9) и везде ниже обозначает суммирование по всем m, за исключением $m=0$. Представление R в виде (9) требует пояснения. Так как

$$C(0)=\int_0^1 f(x)\,dx,$$

то из (8) в силу (11) получим

$$R=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)-C(0)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C(m)\,e^{2\pi i m x_k}-C(0).$$

Отсюда после выделения слагаемого с $m=0$ и перемены порядка суммирования следует равенство

$$R=\frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' C(m)\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i m x_k},$$

что совпадает с (9).

Учитывая, что для функции $f(x)$, определенной согласно (7),

$$C(m)=\frac{1}{2\pi i m}=\left(1-e^{-2\pi i m\frac{a}{b}}\right), \tag{12}$$

для погрешнсти преобразования можно записать

$$R=\frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{2\pi i m}\left(1-e^{-2\pi i m\frac{a}{b}}\right)\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i m\left\{x_1+\frac{\alpha}{p}(k-1)\right\}}. \tag{13}$$

Для некоторых важных частных случаев выражение (13) можно упростить и получить ряд практически интересных результатов.

Вследствие периодичности ошибок Δ_k целесообразно рассмотреть прежде всего случай усреднения за период, т. е. принять $N=p$.

Так как функция $\exp(2\pi imx)$ имеет период 1, то

$$\sum_{k=1}^{p} e^{2\pi im\left\{x_1+\frac{\alpha}{p}(k-1)\right\}} = e^{2\pi im\left(x_1-\frac{\alpha}{p}\right)} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi im\frac{\alpha}{p}k}.$$

Обозначим $\alpha m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, если αm кратно p. Рассмотрим случай $\alpha m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Очевидно, при этом $\alpha m = pr$, где r — целое и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{p} e^{2\pi im\frac{\alpha}{p}k} = \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi irk} = p,$$

так как $e^{\pm 2\pi ir} = 1$ для любых целых r.

Пусть теперь $\alpha m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Тогда

$$e^{2\pi im\frac{\alpha}{p}} \neq 1.$$

Воспользовавшись известным соотношением

$$S_p = \frac{a_1(q^p-1)}{q-1}$$

для суммы p членов геометрической прогрессии и приняв $a_1 = q = e^{2\pi im\frac{\alpha}{p}}$, получим

$$\sum_{k=1}^{p} e^{2\pi im\frac{\alpha}{p}k} = 0.$$

Так как при α, взаимно простом с p, равенство $\alpha m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ может иметь место только при $m = \pm p, \pm 2p, \ldots$, то, следовательно, только при этих значениях m

$$S(m) = \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi im\frac{\alpha}{p}k} = p.$$

Для остальных m имеем $S(m) = 0$. С учетом полученных результатов для погрешности преобразования с использованием усреднения за $N = p$ периодов измеряемого процесса можно записать

$$R = \frac{1}{p} \sum_{m=-p,\,-2p,\ldots}^{p,\,2p,\ldots} C(m)\, e^{2\pi im\left(x_1-\frac{\alpha}{p}\right)} p = \sum_{m=-p,\,-2p,\ldots}^{p,\,2p,\ldots} C(m)\, e^{2\pi imx_1}.$$

Подставляя в полученное выражение значение $C(m)$, согласно (12), и опуская промежуточные преобразования для погрешности измерения, можно записать:

$$R = \frac{1}{\pi p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n\,\{px_1\}}{n} + \frac{1}{\pi p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n \left\{p\left(\frac{a}{b} - x_1\right)\right\}}{n}. \qquad (14)$$

Учитывая, что [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi \ \text{ и } \ \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2},$$

можно оценить погрешность, согласно (14).

1. Нулевые начальные условия ($x_1 = 0$):

$$R = \frac{1}{\pi p}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi p}\frac{\pi - 2\pi\left\{p\frac{a}{b}\right\}}{2} = \frac{1}{p}\left[1 - \left\{p\frac{a}{b}\right\}\right]. \qquad (15)$$

2. При ненулевых начальных условиях ($0 < x_1 < 1$), рассматривая случаи $a/b > x_1$ и $a/b < x_1$, аналогичным образом можно показать, что:

$$R = \frac{1}{p}\left[1 - \left\{p\frac{a}{b}\right\}\right], \quad \text{если } \left\{p\frac{a}{b}\right\} > \{px_1\}; \qquad (16)$$

$$R = \frac{1}{p}\left[-\left\{p\frac{a}{b}\right\}\right], \quad \text{если } \left\{p\frac{a}{b}\right\} < \{px_1\}. \tag{17}$$

Из (15) — (17) следует, что погрешность преобразования периодических временных интервалов в код с использованием усреднения при любых начальных условиях и любых соотношениях $\left\{\frac{T}{\tau}\right\} = \frac{m}{p}$ не превышает значения

$$-\frac{1}{N} \leqslant R \leqslant \frac{1}{N},$$

если число усреднений $N=p$, и в случаях, когда $p \equiv 0 (\mathrm{mod}\, b)$, может быть равна нулю.

Минимизация погрешности преобразования (9) в случае усреднения за произвольное $N \neq p$, очевидно, связана с минимизацией суммы

$$S = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i m x_k}. \tag{18}$$

Эта сумма при фиксированном N полностью определяется последовательностью $x_k (k=1, 2, \ldots, N)$ и, следовательно, отношением T/τ. Покажем, что сумма (18) при достаточно большом N стремится к нулю, если последовательность x_k равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, принадлежащих $[0, 1]$. Выделим начальный участок последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и через $S_N(l)$ обозначим число точек этого участка, принадлежащих l:

$$S_N(l) = \sum_{\left(\substack{x_i \in l \\ 1 \leqslant i \leqslant N}\right)} 1.$$

Последовательность x_n называется равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, если для любого $l \subseteq [0, 1]$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N(l)}{N} = |l| \qquad [5].$$

Геометрический смысл этого определения достаточно очевиден: при больших N число точек, принадлежащих l, пропорционально длине этого отрезка.

Для оценки равномерности распределения последовательностей в аналитической теории чисел часто пользуются критерием Вейля [5]: для того чтобы последовательность x_n была равномерно распределенной, необходимо и достаточно, чтобы при каждом целом k, отличном от нуля,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i k x_n} = 0. \tag{19}$$

В силу тождественности (18) и (19) следует вывод, что погрешность преобразования с увеличением N будет стремиться к нулю, если последовательность начальных фаз единичных преобразований равномерно распределена на $[0, 1]$.

Пользуясь критерием Вейля, легко показать, что последовательность дробных долей

$$x_n = \{\alpha + \theta n\}$$

равномерно распределена на $[0, 1]$, если α — любое действительное, а θ — любое иррациональное число.

Таким образом, если отношение периодов T и τ может быть иррациональным, то при усреднении за достаточно большое N можно надеяться на хорошую точность преобразования.

Однако критерий Вейля, устанавливая факт равномерности распределения заданной последовательности, не позволяет оценить, какая из двух последовательностей распределена «более равномерно», т. е не дает количественной оценки равномерности распределения. Этот критерий также не позволяет судить о «качестве» любого начального участка последовательности длины N, так как устанавливает факт равномерности лишь при $N \longrightarrow \infty$. Поэтому в литературе для оценки равномерности часто используют другие характеристики, дающие количественности). Однако ниже будет показано, что все же можно аналитически оценить качество последовательности (1) с точки зрения минимизации погрешности преобразования, если воспользоваться представлением рационального числа α/p цепными дробями.

Известно [6], что каждое рациональное число $0<\alpha/p<1$ можно представить в виде конечной непрерывной (цепной) дроби

$$\frac{\alpha}{p} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}, \tag{20}$$

где $q_n \geqslant 1$ — целые числа ($k=1, 2, \ldots, n$). Эти целые называются неполными частными числа α/p.

Используя такое представление числа α/p, можно показать, что если неполные частные α/p ограничены величиной M, то для погрешности преобразования периодических временных интервалов в код с использованием усреднения результатов N единичных последовательных преобразований справедлива оценка

$$|R| < \frac{1}{p} + \frac{8}{N}(M+1)(1+\ln p)^2. \tag{21}$$

Отсюда следует, что погрешность преобразования будет минимальной, если неполные частные α/p ограничены величиной $M=1$. Можно показать [7], что неполные частные ограничены величиной $M=1$ только тогда, когда α/p представляет собой отношение двух соседних чисел Фибоначчи. Последовательность Фибоначчи представляет собой последовательность целых 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., в которой первые два члена равны единице и каждый из последующих членов равен сумме двух предыдущих

$$u_1=1;\ u_2=1;\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2}.$$

Полученный результат не является неожиданным, так как известно использование чисел Фибоначчи для генерирования равномерно распределенных псевдослучайных чисел с помощью ЦВМ.

В связи с тем, что при выводе выражения (21) приходится принимать грубые оценки, полученная формула является весьма приближенной и дает сильно завышенную оценку $|R|$.

Основное назначение этой формулы — показать возможность сравнения последовательностей x_k при различных значениях $\frac{\alpha}{p} = 1 - \left\{\frac{T}{\tau}\right\}$ по наибольшим неполным частным M с целью выбора наиболее эффективных последовательностей и, следовательно, соотношений T/τ, обеспечивающих наименьшую погрешность R.

С целью проверки полученных выводов о влиянии M на погрешность R, а также для уточнения оценки (21) были проведены расчеты на ЦВМ, результаты которых представлены ниже. Расчеты R велись по точным формулам, которые можно получить из выражения (13):

$$R = \frac{K^*}{N} - \frac{a}{b} \tag{22}$$

или

$$R = 1 - \frac{a}{b} - \frac{K^{**}}{N}, \tag{23}$$

где K^* — число элементов последовательности x_k ($k=1, 2, \ldots, N$), которые приняли значение из интервала $[0, a/b]$, а K^{**} — число элементов, которые приняли значение из интервала $[a/b, 1]$. Таким образом, для

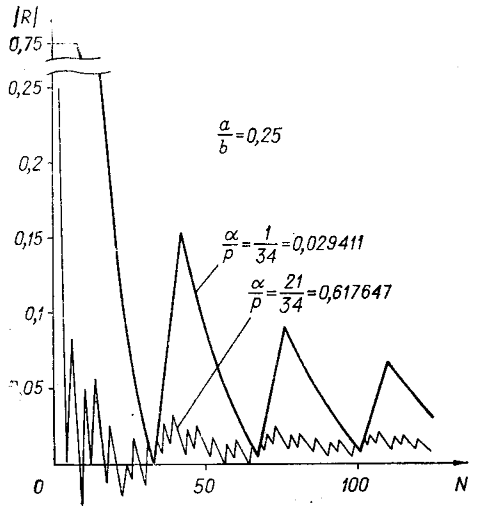

Рис. 2.

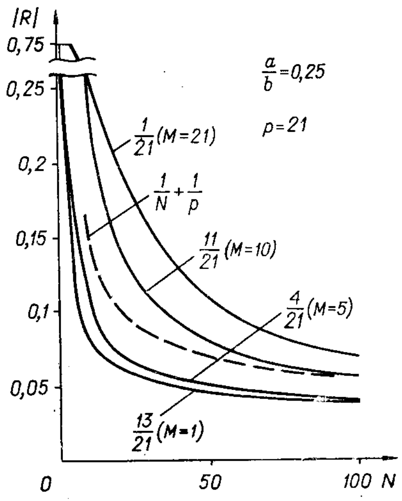

Рис. 3.

определения ошибки преобразования с использованием усреднения N последовательных измерений необходимо определить первые N элементов последовательности $x_k = \left\{x_1 + \frac{\alpha}{p}(k-1)\right\}$ и определить, сколько раз (K^*) элементы последовательности принимали значения из интервала $[0, a/b]$ или сколько раз (K^{**}) — из интервала $[a/b, 1]$, и далее воспользоваться соотношением (22) или (23). С учетом (22) на ЦВМ были получены значения ошибки преобразования с использованием усреднения за $N=1, 2, 3, \ldots, 200$ единичных преобразований для двух значений a/b (0,25 и 0,50) и шести значений α/p.

Для примера на рис. 2 показаны два графика зависимостей $R = f(N)\left(\frac{\alpha}{p} = \frac{1}{34};\ \frac{21}{34}\right)$. Отношение $\frac{\alpha}{p} = \frac{21}{34}$ представляет собой отношение чисел Фибоначчи.

На рис. 3 показаны кривые, полученные путем соединения точек максимумов кривых, аналогичных показанным на рис. 2 для различных значений α/p. Каждая кривая на рис. 3 указывает область, в пределах которой меняется погрешность R.

Анализ 32 рассчитанных кривых (часть которых показана на рис. 2, 3) позволяет сделать следующие выводы:

1) погрешность $R=f(N)$ имеет колебательный характер и с ростом N стремится к значениям $\frac{1}{p}\left(1 - \left\{p\frac{a}{b}\right\}\right)$ или $-\frac{1}{p}\left\{p\frac{a}{b}\right\}$ в зависимости от начальных условий;

2) погрешность R монотонно зависит от максимального неполного частного M при разложении $\frac{\alpha}{p} = 1 - \left\{\frac{T}{\tau}\right\}$ в цепную дробь;

3) наименьшую погрешность обеспечивает α/p, соответствующее отношению чисел Фибоначчи;

4) для приближенных оценок погрешности R при усреднении за произвольное N можно пользоваться выражением

$$|R| < \frac{1}{p} + \frac{M}{N}.$$

Применительно к процессу измерения длительности временных интервалов при произвольном числе усреднений N можно сделать вывод, что этот процесс целесообразно организовывать так, чтобы начальные фазы единичных преобразований образовывали неслучайную последовательность, равномерно распределенную на интервале [0, 1], например в соответствии с выражением

$$x_k = \left\{x_1 + \frac{u_{n-1}}{u_n}(k-1)\right\},$$

где u_n, u_{n-1} — соседние числа Фибоначчи; $0 \leqslant x_1 < 1$. При заданном N начальную фазу целесообразно изменять по закону $x_k = \left\{x_1 + \frac{\alpha}{N}(k-1)\right\}$, где α — любое целое, не кратное N; $0 \leqslant x_1 < 1$. При $\alpha = 1$ и $x_1 = 0$

$$x_k = \left\{\frac{1}{N}(k-1)\right\} = \frac{1}{N}(k-1).$$

Желаемая последовательность начальных фаз преобразований может быть обеспечена изменением периода счетных импульсов τ в случае, когда измеряемый временной интервал имеет стабильный период повторения, или созданием искусственной задержки между первым счетным импульсом и началом временного интервала (например, с помощью генератора ударного возбуждения), если временной интервал повторяется через различные промежутки времени.

При такой организации процесса измерения ошибка будет уменьшаться пропорционально $1/N$, в то время как при случайной модуляции начальной фазы в последовательных измерениях она пропорциональна лишь $1/\sqrt{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Бартмер. Методические погрешности цифровых приборов для измерения частоты и фазы.— Сб. работ по вопросам электромеханики, вып. 7. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Э. И. Вологдин. Повышение точности преобразования временных интервалов в цифровой код методом корреляционного усреднения.— Автометрия, 1969, № 2.
3. Н. М. Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., Физматгиз, 1963.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
5. И. М. Соболь. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М., «Наука», 1969.
6. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. М., Физматгиз, 1961.
7 Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию 24 декабря 1971 г.