ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ИНВАРИАНТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В задачах преобразования сигналов нередко встречаются случаи, когда ошибка схемы зависит от произведения сигналов, определяемых возмущениями, поступившими на ее вход. Пусть, например, две помехи $n_1(t)$ и $n_2(t)$, представляющие собой регулярные или случайные стационарные временные процессы, поступают на входы системы (см. рисунок), состоящей из двух линейных стационарных звеньев с весовыми функциями $w_1(t)$ и $w_2(t)$, и вызывают ошибку системы $y(t)=q_1(t)q_2(t)$.

Представляет интерес задача синтеза структуры последовательного корректирующего линейного звена с весовой функцией $f(t)$, обеспечивающего равенство нулю среднего по времени или интегрального значения

$$\varphi_1(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T q_1(t)\,q_2(t)\,dt \qquad \text{или} \qquad \varphi_2(0)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T q_1(t)\,q_2(t)\,dt. \quad (1)$$

Как известно, выражения (1) можно преобразовать: если помехи — случайные процессы, то

$$\varphi_1(0)=\frac{1}{j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} ds S_{q_1q_2}(s)=\frac{1}{j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} W_1(s)\,W_2(-s)\,F(s)\,S_{n_1n_2}(s)\,ds; \quad (2)$$

если $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — регулярные функции времени, то

$$\varphi_2(0)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} ds q_1(s)\,q_2(-s)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} ds W_1(s)\,W_2(-s)\,F(s)\,n_1(s)\,n_2(-s), \quad (3)$$

где $W_1(s)$, $W_2(s)$, $F(s)$ — передаточные функции звеньев системы и ее коррекции; $S_{q_1q_2}(s)$ и $S_{n_1n_2}(s)$ — взаимные спектральные плотности случайных сигналов, указанных в индексах; $n_1(s)$ и $n_2(s)$ — частотные характеристики регулярных сигналов; оператор $s=j\omega$. Не делая впредь различия между регулярными и случайными процессами, с точностью до постоянного множителя, выражения (2) и (3) можно переписать следующим образом:

$$\varphi(0)=\frac{1}{j}\int_{-j\infty}^{-j\infty} ds F(s)\,D_1(s)\,D_2(-s)=\frac{1}{2j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} ds\{F(s)\,D_1(s)\,D_2(-s)+F(-s)\,D_1(-s)\,D_2(s)\}, \quad (4)$$

где

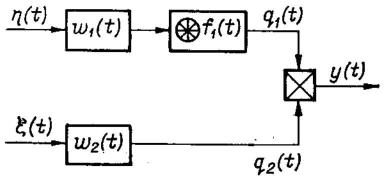
$$D_1(s)=W_1(s)\,S^{+}_{n_1n_2}(s) \text{ или } D_1(s)=W_1(s)\,n_1(s); \quad (5)$$

$$D_2(-s)=W_2(-s)\,S^{-}_{n_1n_2}(s) \text{ или } D_2(-s)=W_2(-s)\,n_2(-s); \quad (6)$$

$$S_{n_1n_2}(s)=S^{+}_{n_1n_2}(s)\,S^{-}_{n_1n_2}(s).$$

Верхние индексы у сомножителей выражения (6) указывают на то, что их нули и полюсы расположены соответственно в левой или правой полуплоскости комплексного переменного s.

Выражение (4), рассматриваемое как функционал качества системы, используется для решения задачи синтеза коррекции. Задача синтеза коррекции системы, которая содержит только линейные стационарные звенья и ошибка которой зависит от произведения сигналов, вызванных действием стационарных помех, состоит в следующем: выбором передаточной функции $F(s)$ последовательного корректирующего звена в одной из цепей системы нужно обеспечить равенство нулю функционала качества (4)



$$I=\varphi(0)=0. \qquad (7)$$

Для решения задачи предлагается следующий метод. Равенство (7) перепишем в виде приближенного равенства

$$I-\varepsilon\simeq 0;\ \varepsilon\longrightarrow 0. \qquad (8)$$

Если выполнить условие $\varepsilon\equiv 0$, то равенство (7) будет выполняться. Тождество $\varepsilon\equiv 0$ получим, выразив ε через произвольную пока дробно-рациональную функцию $V(s)$ в виде интегрального соотношения

$$\varepsilon=\frac{1}{2j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}ds\,[V(s)+V(-s)] \qquad (9)$$

и полагая, что разность показателей степеней полиномов ее знаменателя и числителя всегда определяется неравенством $n_v-m_v\geqslant 2$. Справедливость этого положения показана, например, в [1].

Произведя несложные преобразования, перепишем уже точное равенство (8) с учетом выражений (4) и (9):

$$I=I-\varepsilon=\frac{1}{2j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}ds\left\{D_2(-s)\left[F(s)D_1(s)-\frac{V(s)}{D_2(-s)}\right]+D_2(s)\left[F(-s)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times D_1(-s)-\frac{V(-s)}{D_2(s)}\right]\right\}. \qquad (10)$$

Для того чтобы равенство (7) действительно выполнялось, должны соблюдаться некоторые условия. Представив выражение $V(s)/D_2(-s)$ в виде суммы двух слагаемых, одно из которых имеет особые точки в левой, второе — в правой полуплоскостях комплексного переменного s, и обозначив их соответственно $[\ \ ]_+$ и $[\ \ ]_-$, получим

$$\frac{V(s)}{D_2(-s)}=\left[\frac{V(s)}{D_2(-s)}\right]_+ +\left[\frac{V(s)}{D_2(-s)}\right]_-. \qquad (11)$$

Если искомую передаточную функцию определить соотношением

$$F(s)=\frac{1}{D_1(s)}\left[\frac{V(s)}{D_2(-s)}\right]_+, \qquad (12)$$

то выражение (10) приобретает вид

$$I=\frac{1}{2j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}ds\,[N(-s)+N(s)], \qquad (13)$$

где

$$N(s)=D_2(s)\left[\frac{V(-s)}{D_2(s)}\right]_+;\quad N(-s)=D_2(-s)\left[\frac{V(s)}{D_2(-s)}\right]_-.$$

Как уже известно, если разность показателей степеней полиномов знаменателя и числителя функции $N(s)$ определяется неравенством $n_N-m_N\geqslant 2$, обеспечивается равенство $I=0$. Ввиду произвола в выборе функции $V(s)=A_*(s)/B_*(s)$, на которую наложено пока лишь одно органичение $n_V-m_V\geqslant 2$, передаточная функция $F(s)$ также произвольна. Оказывается удобным показатель степени полинома числителя функции $V(s)$ принять равным нулю ($m_V=0$, $A_*(s)=A$) и связать свойства функций $V(s)$ и $D_2(s)=A(s)/B(s)$ следующим образом:

$$1) \text{ если } n_B\geqslant 2, \text{ то } B_*(s)=B(s); \tag{14}$$

$$2) \text{ если } n_B=1, \text{ то } B_*(s)=B(s)(c_1s+c_0); \tag{15}$$

$$3) \text{ если } n_B=0, \text{ то } B_*(s)=b_2s^2+b_1s+b_0, \tag{16}$$

где b_2, b_1, b_0, c_1, c_0 — произвольные постоянные.

Нетрудно показать, что в этом случае выбор передаточной функции $F(s)$, решающей задачу синтеза, возможен, если разность степеней полиномов знаменателя и числителя функции $D_2(s)$ $n_D-m_D\geqslant 1$ и $m_D\geqslant 1$, а также при нулевой степени полинома числителя $m_D=0$ и $n_D\geqslant 2$, так как тогда $N(s)=-D(s)$, $N(-S)=-D(-s)$.

Если $m_D=0$ и выполняется условие (14), то полиномы числителя и знаменателя выражения (11) отличаются только знаками при нечетных членах и масштабом. Как нетрудно убедиться, в этом случае за искомую передаточную функцию можно принять выражение

$$F(s)=\frac{1}{D_1(s)}\,\frac{B(s)-B(-s)}{B(s)}. \tag{17}$$

При выполнении условий (14)—(16) и $A_*(s)=A$ синтезируемые передаточные функции оказываются наиболее простыми и удобными в реализации.

Таким образом, задача синтеза структуры коррекции решена.

Следует отметить, что в частных случаях равенства единице одного из сомножителей выражения (1) предложенный метод позволяет синтезировать коррекцию системы по критерию качества, являющемуся интегральным значением ошибки выходного сигнала системы.

Пример. Пусть выбором передаточной функции системы виброизоляции по оси x требуется обеспечить равенство нулю математического ожидания момента упругого дебаланса гироскопа направления, подверженного действию плоской стационарной случайной вибрации со спектральной плотностью ускорения $S(s)$. Как известно [2], выражение математического ожидания этого момента имеет вид

$$\langle M_y\rangle=\frac{m}{j}\int\limits_{-j\infty}^{+j\infty} ds\,[W_{0x}(s)\,W_x(s)\,W_{0z}(-s)\,\Phi_z(-s)\,S_{\xi\eta}(s)-$$
$$-W_{0x}(-s)\,\Phi_x(-s)\,W_{0z}(s)\,W_z(s)\,S_{\eta\xi}(s)], \tag{18}$$

где $W_{ox}(s)$ и $W_{oz}(s)$ — передаточные функции систем виброизоляции в направлении осей x и z; $W_x(s)$, $W_z(s)$, $\Phi_x(s)$, $\Phi_z(s)$ — передаточные функции гироскопа по вибрационному воздействию; $S_{\xi\eta}(s)$ и $S_{\eta\xi}(s)$ — взаимные спектральные плотности исходных вибрационных воздействий по осям x и z.

Вводя обозначения

$$K_1(s)K_2(-s)=W_x(s)\Phi_z(-s)-\Phi_x(s)W_z(-s);$$
$$D_1(s)=K_1(s)\,S^{+}_{\xi\eta}(s);\quad D_2(s)=W_{0z}(s)\,K_2(s)\,S^{+}_{\eta\xi}(s) \tag{19}$$

и используя выражение (12), запишем искомую передаточную функцию системы виброизоляции по оси x в виде

$$\overline{W}_{0x}(s)=\frac{1}{K_1(s)\,S^{+}_{\xi\eta}(s)}\left[\frac{V(s)}{W_{0z}(-s)\,K_2(-s)\,S^{-}_{\eta\xi}(s)}\right]_+,$$

где $V(s)$ — произвольная функция, определяемая выражением (9). Если $W_{oz}(s)=1$,

$$W_x(s)=\frac{2\zeta_1\alpha_1s+\alpha_1^2}{s^2+2\zeta_1\alpha_1s+\alpha_1^2}\quad\text{и}\quad\Phi_x(s)=\frac{1}{s^2+2\zeta_1\alpha_1s+\alpha_1^2},$$

$$W_z(s) = \frac{2\zeta_2\alpha_2 s + \alpha_2^2}{s^2 + 2\zeta_2\alpha_2 s + \alpha_2^2} \quad \text{и} \quad \Phi_z(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta_2\alpha_2 s + \alpha_2^2},$$

$$S_{\xi\eta}(s) = S_{\eta\xi}(s) = c \text{ и } \alpha_1 > \alpha_2,$$

то передаточная функция системы виброизоляции по оси x, обеспечивающая равенство $\langle M_y \rangle = 0$, определяется выражением

$$\overline{W}_{0x}(s) = \frac{4\zeta_2\alpha_2 s}{2(\zeta_1\alpha_1 + \zeta_2\alpha_2)s + \alpha_1^2 - \alpha_2^2} \, \frac{s^2 + 2\zeta_1\alpha_1 s + \alpha_1^2}{s^2 + 2\zeta_2\alpha_2 s + \alpha_2^2}. \tag{20}$$

Представляет интерес то обстоятельство, что передаточные функции системы виброизоляции, полученные с позиций известного в гироскопии расширенного принципа «равножесткости», являют собой частный случай синтезируемых предложенным методом передаточных функций, когда $W_x(s) = W_z(s)$ и $W_{ox}(s) = W_{oz}(s)$.

ВЫВОД

Предложен удобный метод аналитического синтеза реализуемой коррекции, обеспечивающей инвариантность системы к воздействиям определенного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. К. Ньютон, Л. А. Гулд, Дж. Ф. Кайзер. Теория линейных следящих систем. М., Физматгиз, 1961.
2. Л. Н. Блохин. Синтез оптимальной структуры системы виброизоляции гироскопа.— Прикладная механика, 1971, т. 7, вып. 10.

Поступила в редакцию 15 мая 1972 г.