зиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. 1. Л., 1970.
5. А. Н. Домарацкий. Общие вопросы в задаче автоматизации определения статистических характеристик случайных сигналов.— Автометрия, 1973, № 4.
6. Э. П. Тихонов. Метод определения оценки одномерной функции распределения.— Тр. III Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. III. Л., 1970.
7. Г. М. Махонин. Методы измерения одномерных функций распределения вероятностей широкополосных случайных процессов.— Тр. I Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. 2. Новосибирск, 1968.
8. Г. М. Махонин. Метод измерения одномерных функций распределения вероятностей и производных этих функций.— Тр. II Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. 2. Новосибирск, 1969.
9. K. J. Yacoub. Application of Quasi — Peak Detector to the Measurement of Probability Density Function.—IRE Transaction on Instrumentation, 1959, v. 1—8, № 1.
10. Л. С. Тимонен. Об оценке функций распределения с помощью квазипикового детектора.— Тр. II конференции «Автоматический контроль и методы электрических измерений». Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1962.
11. М. Дж. Кендалл, А. Стюарт. Теория распределений. М., «Наука», 1966.
12. В. А. Антошин, В. Я. Розенберг. Определение параметра стационарного процесса методом сравнения одномерных законов распределения.— Тр. I Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. 2. Новосибирск, 1968.
13. В. Б. Буховцев, В. И. Шмальгаузен. Фотографический способ исследования случайных процессов.— Приборы и техника эксперимента, 1959, № 4.
14. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
15. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.

Поступила в редакцию 27 октября 1972 г.

УДК 519.24 : 621.374

Е. А. ТРОИЦКИЙ

(Ленинград)

ОЦЕНИВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ СТАТИСТИКАМ

Параметры распределения нормальной случайной величины можно оценить по экстремальным значениям выборки [1]. Целесообразность исследования возможности применения такой же процедуры для вычисления оценок математического ожидания (м. о.) μ и среднего квадратического отклонения (с. к. о.) σ нормальных эргодических случайных процессов, особенно для экспресс-анализа, является очевидной. Можно утверждать, что процедуры оценивания м. о. и с. к. о. нормальных случайных процессов и случайных величин по экстремальным статистикам должны быть подобными. Основное затруднение, которое встретится при рассмотрении данного вопроса, состоит в определении характеристики эквивалентной по своему значению объему выборки, по которой находятся параметры распределения экстремальных статистик случайных величин.

Под максимальным и минимальным значениями реализации процесса на интервале (О, T) будем понимать соответственно наибольший из локальных максимумов и наименьший из локальных минимумов реализации на данном интервале.

Найдем параметры распределения полусуммы максимального $\xi_{\max}(T)$ и минимального $\xi_{\min}(T)$ значений реализации длительностью T

$$\bar{x}_{Tэ}=\frac{\xi_{\max}(T)+\xi_{\min}(T)}{2}=\mu+\bar{x}_{T\gamma}\sigma$$

и размаха

$$H_{Tэ}=\xi_{\max}(T)-\xi_{\min}(T)=H_{T\gamma}\sigma,$$

где

$$\bar{x}_{T\gamma}=\frac{\xi_{\gamma\max}(T)+\xi_{\gamma\min}(T)}{2};\quad H_{T\gamma}=\xi_{\gamma\max}(T)-\xi_{\gamma\min}(T);$$

$$\xi_{\gamma\max}(T)=\frac{\xi_{\max}(T)-\mu}{\sigma};\quad \xi_{\gamma\min}(T)=\frac{\xi_{\min}(T)-\mu}{\sigma}.$$

М. о. и дисперсия данных характеристик, вследствие очевидной симметричности относительно м. о. процесса распределений экстремальных статистик, равны:

$$M[\bar{x}_{Tэ}]=\mu; \tag{1}$$

$$M[H_{Tэ}]=2\mu_{Tэ}\sigma=\mu_{Tн}\sigma; \tag{2}$$

$$D[\bar{x}_{Tэ}]=0{,}5\sigma^2_{Tэ}(1+\rho_T);\quad D[H_{Tэ}]=2\sigma_{Tэ}\sigma^2(1-\rho_T)=\sigma^2_{Tн}\sigma^2(1-\rho_T),$$

где $\mu_{Tэ}$, $\mu_{Tн}$ — м. о. максимальной статистики и размаха реализации длительностью T процесса с единичной дисперсией; $\sigma^2_{Tэ}$, $\sigma^2_{Tн}$ — дисперсия экстремальной статистики и размаха реализаций длительностью T процесса с единичной дисперсией; ρ_T — коэффициент корреляции между экстремальными статистиками реализаций длительностью T процесса с единичной дисперсией.

Таким образом, согласно (1), полусумма экстремальных значений является несмещенной оценкой м. о. процесса.

Далее, согласно (2), м. о. размаха пропорционально с. к. о. σ. Поэтому частное от деления наблюдаемого размаха $H_{Tэ}$ реализации или среднего $H_{Tэ}$ из наблюдаемых размахов нескольких реализаций длительностью T на соответствующее значение м. о. размаха $H_{Tэ}$ процесса с единичной дисперсией — оценки с. к. о. процесса. Они имеют вид:

$$S_{Tэ}=\frac{H_{Tэ}}{\mu_{Tн}}, \tag{3}$$

$$\bar{S}_{Tэ}=\frac{\sum_{i=1}^{K_0} H_{T_iэ}}{K_0\mu_{Tн}}, \tag{4}$$

где K_0 — число реализаций, и являются несмещенными, так как с учетом (2) имеем

$$M[S_{Tэ}]=M[\bar{S}_{Tэ}]=\sigma.$$

Дисперсии оценок, определяемых формулами (3) и (4), равны:

$$D[S_{Tэ}]=\frac{\sigma^2_{Tэ}}{\mu^2_{Tн}}\sigma^2(1-\rho_T);\quad D[\bar{S}_{Tэ}]=\frac{D[S_{Tэ}]}{K_0}.$$

Кроме того, в качестве оценки м. о. процесса можно также брать среднее $\bar{\bar{x}}_{Tэ}$ из полусуммы экстремальных значений нескольких реализаций:

$$\bar{\bar{x}}_{Tэ}=\frac{\sum_{i=1}^{K_0}\bar{x}_{T_iэ}}{K_0}.$$

Данная оценка, очевидно, также является несмещенной и имеет дисперсию $D\left[\bar{\bar{x}}_{T_э}\right]=\frac{D[\bar{x}_{T_э}]}{K_0}$.

Если процедура применения оценки $\bar{x}_{T_э}$ не требует априорных сведений о процессе, то для вычисления с. к. о. по размаху необходимо знать м. о. максимальной статистики $\xi\gamma_{max}(T)$ для этого же вида процесса с единичной дисперсией и той же длительности реализации.

Кроме того, для вычисления дисперсий оценок м. о. и с. к. о. процесса по экстремальным статистикам необходимо знать дисперсию последних.

Найдем параметры функции распределения экстремальных статистик. Вероятность того, что максимальное значение $\xi_{\gamma max}(T)$ нормированного процесса $\xi_\gamma(t)=\frac{\xi(t)-\mu}{\sigma}$ будет меньше фиксированного уровня γ_j, имеет вид [2]

$$P\{\xi_{\gamma max}(T)<\gamma_i\}=P\{N_j(T)=0\}-P\{\xi_\gamma(t)>\gamma_j\};\ 0<t\leqslant T, \qquad (5)$$

где $\gamma_j=(x_j-\mu)/\sigma$ — нормированный уровень; $N_j(T)$ — число выбросов процесса за уровень γ_j на интервале $(0,\ T)$; x_j — абсолютное значение уровня.

Полагаем длительность реализации достаточной для того, чтобы утверждать, что практически с вероятностью 1 происходит пересечение м. о. процесса. Это первое ограничение. Тогда с вероятностью 1 максимальная статистика процесса является положительной и последним слагаемым в выражении (5) можно пренебречь. Очевидно, чем больше длительность реализации, тем дальше от м. о. расположена область возможных значений максимальной статистики.

Далее считаем, что рассматриваем область значений $(\gamma_п\div\infty)$, в которой поток выбросов соответствует пуассоновской последовательности. Это второе ограничение на длительность реализации. Пуассоновская модель для потока выбросов строго справедлива только асимптотически, когда модуль нормированного уровня стремится к бесконечности [2]. Однако для каждого типа случайного процесса можно определить нормированный уровень $\gamma_п$, начиная с которого с заданной степенью согласия для потока выбросов можно использовать пуассоновскую модель [3, 4].

Частота выбросов нормального стационарного процесса для фиксированного уровня определяется выражением [2]

$$E_j=E_0\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_j^2\right), \qquad (6)$$

где $E_0=\frac{1}{2\pi}[-R''(0)]^{0,5}$ — частота выбросов относительно уровня $\gamma_j=0$; $R''(0)$ — вторая производная от корреляционной функции при значении аргумента τ, равном нулю.

С учетом изложенного и выражений (5) и (6) распределение максимальной статистики $\xi_{\gamma max}(T)$ можно представить в виде

$$F_{max}(\gamma_j)=\exp\left[-E_0T\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_j^2\right)\right];\quad \gamma_j>\gamma_п.$$

Функция распределения минимальной статистики процесса определяется аналогичным образом для области отрицательных значений γ_j и может быть представлена

$$F_{min}(\gamma_j)=P\{\xi_{\gamma\,min}(T)<\gamma_j\}=1-\exp\left[-E_0T\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_j^2\right)\right];$$

$$\gamma_j<-\gamma_п.$$

Таким образом, распределение экстремальных статистик процесса зависит от м. о. числа выбросов реализации процесса относительно его м. о.

На вычислительном центре для ряда значений E_0T были рассчитаны функции распределения и параметры максимальной статистики. Значения последних приведены в таблице.

E_0T	3	6	10	20	40	100	1000
$\mu_{Tэ}$	1,68	2,00	2,34	2,63	2,88	3,19	3,85
$\sigma^2_{Tэ}$	0,55	0,34	0,27	0,22	0,18	0,15	0,11

Из полученных данных следует, что с увеличением среднего числа пересечений м. о. процесса область возможных значений максимальной статистики сужается и сдвигается в сторону больших γ_j. Анализ зависимости функции распределения максимальной статистики от E_0T показывает, что при $E_0T>6$ с вероятностью 0,9 область возможных значений $\xi_{max}(T)$ больше $1{,}5\,\sigma$.

Исследование большого статистического материала позволяет утверждать, что для нормальных процессов с конечным вторым спектральным моментом для потока событий, порождаемых пересечением уровней $\gamma_j>1{,}5$, в первом приближении обычно можно использовать пуассоновскую модель событий. Поэтому два приведенных ранее ограничения выполняются при длительности реализации $T>6/E_0=T_м$. Очевидно, такие же выводы можно сделать и для минимальной статистики, только смещение области ее возможных значений происходит в сторону уменьшения γ_j. Необходимо заметить, что длительность реализаций при статистических исследованиях практически всегда значительно превышает $T_м$.

Следовательно, процедура расчета с. к. о. по размаху предполагает, что число выбросов E_0T процесса известно. Последнее может быть рассчитано по корреляционной функции процесса или по реализации процесса при достаточной ее длительности и известном м. о. процесса либо его оценки. При известной корреляционной функции с. к. о. оценивается без априорных сведений о м. о. процесса.

Перейдем теперь к анализу дисперсий этого вида оценок. Если длительность реализаций значительно больше интервала корреляции, то экстремальные статистики можно считать практически независимыми и соответственно пренебречь коэффициентом корреляции ρ_T по сравнению с единицей. С учетом независимости экстремальных статистик для ряда значений E_0T рассчитаны функции распределения и плотности вероятности для полусуммы экстремальных статистик и размаха процесса с единичной дисперсией. Из полученных результатов следует, что область возможных значений $\bar{x}_{T\gamma}$ расположена симметрично относительно нуля и сужается с увеличением E_0T. Область возможных значений размаха также сужается с увеличением E_0T и сдвигается в сторону все больших положительных значений. Сужение области возможных значений $\bar{x}_{T\gamma}$ происходит медленно. На основании этого можем сделать вывод, что оценка $\bar{x}_{T\gamma}$ обладает медленной сходимостью по вероятности относительно оцениваемой характеристики. Кроме того, это также подтверждается графиком зависимости дисперсий $D[\bar{x}_{Tэ}]$ (кривая *1* рис. 1) для процесса с единичной дисперсией. По осям ординат и абсцисс использован логарифмический масштаб. Оценка $S_{Tэ}$ обладает более высокой степенью сходимости (кривая *2* рис. 1).

С точки зрения быстроты сходимости к оцениваемым характеристикам оценки $\bar{\bar{x}}_{Tэ}\bar{S}_{Tэ}$ обладают преимуществом перед оценками $\bar{\bar{x}}_{Tэ}$ и $S_{Tэ}$. Это следует из рис. 2 (по осям абсцисс и ординат использован логарифмический масштаб), на котором приведено семейство кривых, отражающих зависимость

$$\vartheta_{T\text{э}} = \frac{D\left[\bar{\bar{x}}_{T\text{э}}\right]}{D\left[\bar{x}_{T_{\Sigma}\text{э}}\right]} = \frac{\sigma^2_{T\text{э}}}{K_0\sigma^2_{T_{\Sigma}\text{э}}} \simeq \frac{D\left[\bar{S}_{T\text{э}}\right]}{D\left[S_{T_{\Sigma}\text{э}}\right]}.$$

Графики построены для ряда конкретных значений E_0T в зависимости от м. о. общего числа пересечений реализациями длительностью $T_{\Sigma}=K_0T$ м. о. процесса. Очевидно, значения $\vartheta_{T\text{э}}$ необходимо рассматривать только для целых значений K_0 и для $K_0=1$ имеем $\vartheta_{T\text{э}}=1$. Из приведенных графиков следует, что при достаточно большой длительности реализации процесса для вычисления оценок характеристик μ и

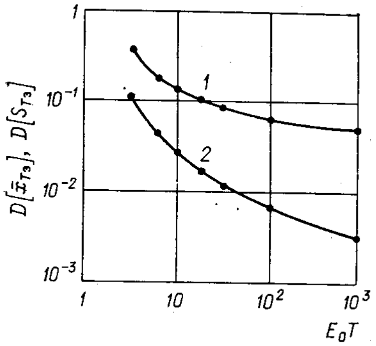

Рис. 1. Зависимость дисперсий оценок математического ожидания и среднего квадратического отклонения процесса по экстремальным статистикам от числа выбросов E_0T процесса.

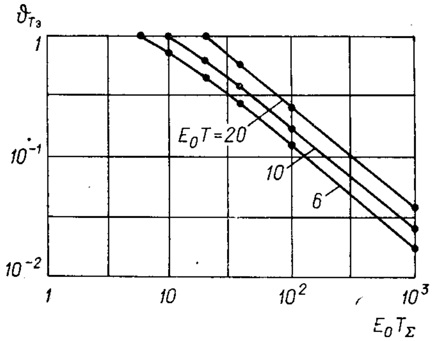

Рис. 2. Зависимость относительных эффективностей оценок среднего квадратического отклонения процесса по размаху и среднему размаху от числа выбросов E_0T_{Σ} процесса.

σ по экстремальным статистикам с точки зрения увеличения эффективности целесообразно разбить ее на несколько реализаций с длительностью T, близкой к $T_{\text{м}}$, и использовать оценки $\bar{\bar{x}}_{T\text{э}}$ и $\bar{S}_{T\text{э}}$.

ВЫВОДЫ

Получены несмещенные и состоятельные оценки для расчета математического ожидания и среднего квадратического отклонения нормального стационарного эргодического процесса по экстремальным статистикам. Показано, что чем больше частота выбросов процесса относительно его математического ожидания, тем более эффективным является данный вид оценок.

Предложенную процедуру оценивания указанных характеристик, вследствие ее очевидной простоты, можно рекомендовать к применению при большом объеме статистического материала или для экспресс-анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Гумбель. Статистика экстремальных значений. М., «Мир», 1965.
2. Г. Крамер, М. Лидбеттер. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.
3. Д. Кокс, П. Льюис. Статистический анализ последовательностей событий. М., «Мир», 1969.
4. В. И. Тихонов. О выбросах флуктуаций и их коррелированности. — Электросвязь, 1957, № 6.

Поступила в редакцию 7 августа 1972 г.