3. G. O. Young. Optimum Space — Time Signal Processing and Parameter Estimation.— IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, 1968, 4, № 3.
4. И. А. Богуславский. О несмещенной оценке полезного сигнала, зависящего нелинейно от неизвестных параметров.— Автоматика и телемеханика, 1960, № 1.
5. Г. И. Бельчанский. К оценке нелинейной функции при наблюдении сигнала, содержащего помеху.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1967, № 2.
6. В. Н. Брандин, В. С. Лобачев. Об одном методе нелинейной оценки параметров.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 8.

Поступила в редакцию 9 февраля 1971 г.

УДК 62-501.46

А. З. КИСЕЛЕВ

(Ленинград)

ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

С увеличением требований к точности работы измерительных систем приходится учитывать статистические свойства входного шума и ошибок измерений. Такой учет в ряде случаев позволяет существенно повысить точность измерений, хотя структура получающейся при этом измерительной системы может оказаться довольно сложной. По-видимому, к минимальным усложнениям приводит учет лишь корреляционных (спектральных) характеристик. В последнем случае входной шум и ошибки измерений удобно полагать гауссовскими процессами.

В случае поступления информации по нескольким каналам высокая точность может быть достигнута как за счет дублирования измерений, так и за счет учета внутри- и междуканальных статистических связей.

Ниже устанавливается аналитический алгоритм построения измерительной системы для получения оценок коэффициентов линейной комбинации заданных функций, поступающей по нескольким каналам с гауссовскими шумами. Для общности будет предполагаться, что по разным каналам поступают не обязательно одинаковые комбинации. Подобные задачи возникают в телеметрических системах, когда полезная информация в конечном итоге содержится в амплитудах сигналов заранее известной формы, в радиолокационных и акустических системах измерения величин отражающих поверхностей и т. д.

Формулировка задачи. Имеется n каналов, в k-м из которых содержится сигнал $s_k(t)$ в аддитивной смеси с шумом $n_k(t)$, причем

$$s_k(t) = \sum_{l=1}^{m_k} a_k^l A_k^l(t), \tag{1}$$

где a_k^l — неизвестные конечные константы (амплитудные множители); $A_k^l(t)$ — известные функции.

Требуется на основе наблюдения процесса $x_k(t)=s_k(t)+n_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ на отрезке времени $[0, T]$ оценить значения коэффициентов a_k^l, $l=1, 2, \ldots, m_k$; $k=1, 2, \ldots, n$. Если оценки $\hat{a}_k^l$ коэффициентов a_k^l найдены, то оценка $\hat{s}_k(t)$ сигнала $s_k(t)$ будет иметь вид

$$\hat{s}_k(t) = \sum_{l=1}^{m_k} \hat{a}_k^l A_k^l(t); \quad k = 1, 2, \ldots; \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

В одномерном случае ($n=1$) сформулированная задача рассматривается в ряде работ [1—4] и др., причем в [3, 4] находятся и подробно (см. [4]) обсуждаются несмещенные оценки минимальной дисперсии, которые в случае гауссовского процесса совпадают с оценками максимального правдоподобия, найденными в [2].

Ниже для произвольного n находятся основные уравнения, определяющие оценки максимального правдоподобия коэффициентов a_k^l, $l=1, 2, \ldots, m_k$; $k=1, 2, \ldots, n$ в предположении нормальности процесса $x_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$. Очевидно, эти оценки являются оценками минимальной дисперсии.

Основные соотношения. Чтобы включить в рассмотрение и тот случай, когда часть коэффициентов в (1) известна, заменим (1) выражением

$$s_k(t) = \sum_{l=1}^{m_k} a_k^l A_k^l(t) + A_k(t), \tag{3}$$

где $A_k(t)$ — известная функция. Кроме того, будем считать, что функции $A_k^l(t)$, $l=1, 2, \ldots, m_k$ независимы для каждого $k=1, 2, \ldots, n$, так как в противном случае число слагаемых суммы в (3) можно было бы уменьшить. Предполагается, что шум $n_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$ является действительным стационарным гауссовским процессом с нулевым средним значением и корреляционной матрицей $\|R_{kl}(t-\tau)\|$, k, $l=1, 2, \ldots, n$. Относительно матрицы $\|R_{kl}(t-\tau)\|$ предполагается, что она строго положительно определена и все ее элементы непрерывны.

В соответствии с [5] при непрерывной $\|R_{kl}(t-\tau)\|$ процесс $n_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$ разлагается в ряд Карунена — Лоэва. Предполагая еще, что функции $A_k^l(t)$, $A_k(t) \in L_2(T)$, т. е. квадратично интегрируемы на отрезке $[0, T]$ (сигналы имеют конечную энергию), и учитывая полноту в $L_2(T)$ используемой системы координатных функций, в указанный ряд можно разложить и процесс $x_k(t) = s_k(t) + n_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда для N координат такого разложения логарифм функции правдоподобия W_N можно записать в виде

$$\ln W_N = K_N - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N} \frac{s_l^2}{\lambda_l^2} + \sum_{l=1}^{N} \frac{x_l s_l}{\lambda_l^2}, \tag{4}$$

где

$$x_l = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T x_k(t)\, \varphi_k^l(t)\, dt; \quad s_l = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T s_k(t)\, \varphi_k^l(t)\, dt; \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

а $\varphi_k^l(t)$, λ_l^2 — собственные функции и собственные числа ядра $\|R_{kl}(t-\tau)\|$, и слагаемое K_N не зависит от s_l, т. е. от коэффициентов a_j^i.

Оценки $\hat{a}_j^i$ максимального правдоподобия коэффициентов a_j^i, фигурирующих в (3), получаются в результате решения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial a_j^i} \ln W_N = 0 \tag{6}$$

с последующим переходом к $N \to \infty$. Из (6) с использованием (3)—(5) получим

$$\sum_{l=1}^{N} \frac{x_l}{\lambda_l^2} \alpha_{lj}^i - \sum_{l=1}^{N} \frac{s_l}{\lambda_l^2} \alpha_{lj}^i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m_j; \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где

$$\alpha_{lj}^i = \int_0^T A_j^i(t)\, \varphi_j^l(t)\, dt; \tag{8}$$

$$s_l = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} \hat{a}_j^i \alpha_{lj}^i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}; \quad \alpha_{lj} = \int_0^T A_j(t) \varphi_j^l(t)\, dt. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{lj}^i}{\lambda_l^2} \left[x_l - \sum_{p=1}^{n} \alpha_{lp} \right] = X_j^i; \tag{10}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{lj}^i \alpha_{lp}^q}{\lambda_l^2} = \mu_{jp}^{iq}. \tag{11}$$

Тогда при $N \to \infty$ соотношения (7) с использованием (9) превращаются в систему $M = \sum_{s=1}^{n} m_s$ алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m_p} \mu_{jp}^{iq}\, \hat{a}_p^q = X_j^i, \quad i = 1, 2, \ldots, m_j; \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

относительно такого же числа коэффициентов $\hat{a}_p^q$, $q = 1, 2, \ldots, m_p$; $p = 1, 2, \ldots, n$.

Для того чтобы показать, что при $N \to \infty$ ряды в (7) сходятся, надо, очевидно, убедиться в конечности постоянных величин μ_{jp}^{iq}, а также в конечности среднего значения величин X_j^i. Это будет гарантировать сходимость второй суммы в (7). Далее необходимо показать ограниченность дисперсии величин X_j^i, что будет гарантировать сходимость в среднем первой суммы в (7). Такие доказательства будут даны несколько позже. Отметим лишь, что при условии положительной определенности ядра $\|R_{kl}(t-\tau)\|$ и независимости функций $A_k^l(t)$, $l = 1, 2, \ldots, m_k$ при любом фиксированном $k = 1, 2, \ldots, n$ система (12) имеет единственное решение (см. приложение 1). Если обозначить через ν_{pj}^{ql} элементы матрицы, обратной к матрице системы (12), т. е. ν_{pj}^{ql} удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} \nu_{pj}^{qi} \mu_{jk}^{il} = \delta_{pq}^{ql}, \tag{13}$$

где $\delta_{pk}^{ql} = 1$ при $l = q$, $k = p$ и $\delta_{kp}^{lq} = 0$ в остальных случаях, то решение системы (12) можно записать в виде

$$\hat{a}_p^q = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} \nu_{pj}^{qi} X_j^i, \quad q = 1, 2, \ldots, m_p; \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Введем функцию

$$h_{kj}^i(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{lj}^i}{\lambda_l^2} \varphi_k^l(t), \tag{15}$$

с помощью которой соотношения (10), (11) при использовании (5), (8), (9) можно записать следующим образом:

$$X_j^i = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T [x_k(t) - A_k(t)]\, h_{kj}^i(t)\, dt; \tag{16}$$

$$\mu_{jp}^{iq} = \int_0^T A_j^i(t)\, h_{jp}^q(t)\, dt. \tag{17}$$

При каждых фиксированных i и j совокупность функций $h_{kj}^i(t)$,

$k=1, 2, \ldots, n$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\sum_{l=1}^{n}\int_{0}^{T} R_{kl}(t-\tau)\, h_{lj}^{i}(\tau)\, d\tau = \delta_{kj}A_{j}^{i}(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T; \quad k=1,2,\ldots,n, \qquad (18)$$

где $\delta_{kj}=0$ при $k\neq j$ и $\delta_{kj}=1$ при $k=j$. Для доказательства заменим слева в (18) функцию $h_{kj}^{i}(t)$ ее рядом (15), а функцию $R_{kl}(t-\tau)$ — разложением [5].

$$R_{kl}(t-\tau)=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^2\varphi_k^s(t)\,\varphi_l^s(\tau), 0\leqslant t, \tau\leqslant T.$$

Используя свойство ортогональности собственных функций [5]

$$\sum_{l=1}^{n}\int_{0}^{T}\varphi_l^s(t)\,\varphi_l^p(t)\,dt=\delta_{sp}; \qquad s, p=1, 2, \ldots \qquad (19)$$

формальными вычислениями левую часть (18) можно свести к выражению $\int\limits_{0}^{T} A_j^i(t)\left\{\sum\limits_{s=1}^{\infty}\varphi_k^s(t)\,\varphi_j^s(\tau)\right\}d\tau$, которое совпадает с правой частью (18), если учесть, что (см. приложение 2)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_k^s(t)\,\varphi_j^s(\tau)=\delta_{kj}\,\delta(t-\tau), \quad 0\leqslant t; \ \tau\leqslant T. \qquad (20)$$

Определим теперь условия, при которых справедливы формально полученные результаты. Используя (16) и несмещенность оценок $\hat{a}_k^l$ (см. приложение 3), для дисперсии DX_j^i величины X_j^i получим

$$DX_j^i=\sum_{k,l=1}^{n}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}R_{kl}(t-\tau)\,h_{kj}^i(t)\,h_{lj}^i(\tau)\,dt d\tau=\sum_{k,l=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{kl}(\omega)\,H_{kj}^i(\omega)\times$$
$$\times H_{lj}^{i*}(\omega)\,d\omega, \qquad (21)$$

где

$$\psi_{kl}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{kl}(t)\,e^{-j\omega t}\,dt; \quad H_{kj}^i(\omega)=\int_{0}^{T}h_{kj}^i(t)\,e^{-j\omega t}\,dt.$$

Предположим, что $H_{kj}^i(\omega)$ при любых $i=1, 2 \ldots, m_j$; $j=1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют неравенствам

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H_{kj}^i(\omega)|^2\,\psi_{kk}(\omega)\,d\omega<\infty, \quad k=1,2,\ldots,n. \qquad (22)$$

Тогда с учетом неравенства $|\psi_{kl}(\omega)|^2\leqslant\psi_{kk}(\omega)\psi_{ll}(\omega)$, $k, l=1, 2, \ldots, n$ и неравенства Коши — Буняковского из (21) следует

$$DX_j^i\leqslant\sum_{k,l=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|H_{kj}^i(\omega)|^2\,\psi_{kk}(\omega)\,d\omega\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|H_{lj}^i(\omega)|^2\,\psi_{ll}(\omega)\,d\omega\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty. \qquad (23)$$

Среднее значение MX_j^i величины X_j^i в соответствии с (16) и (3) имеет вид

$$MX_j^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}a_k^l\int_{0}^{T}A_k^l(t)\,h_{kj}^i(t)\,dt.$$

Подставляя сюда $A_k^l(t)$ из (18), нетрудно получить

$$MX_j^i\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}a_k^l\sum_{s=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|H_{kj}^i(\omega)|^2\,\psi_{kk}(\omega)\,d\omega\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|H_{sk}^l(\omega)|^2\times\right.$$
$$\left.\times\,\psi_{ss}(\omega)\,d\omega\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty, \qquad (24)$$

где снова было применено неравенство Коши — Буняковского и учтены условия (22). Аналогичным путем, исходя из (17) и используя (18) и (22), получим

$$\mu_{jp}^{iq} \leqslant \sum_{l=1}^{n} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |H_{jp}^{q}(\omega)|^2 \psi_{jj}(\omega)\, d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |H_{lj}^{i}(\omega)|^2 \psi_{ll}(\omega)\, d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty. \qquad (25)$$

Полученные неравенства (23)—(25) гарантируют сходимость (при $N \to \infty$) рядов в (7), а также полученных из последних рядов (10) и (11). Как следует из изложенного, для указанной сходимости достаточно, чтобы преобразование Фурье решения системы (18) при любых $i=1, 2, \ldots, m_j$; $j=1, 2, \ldots, n$ удовлетворяло неравенствам (22).

Обозначим $L_2(T, \psi)$ класс векторных функций $h^{\mathrm{T}}(t) = \|h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)\|$, которые обращаются в нуль вне $[0, T]$ и преобразование Фурье $H^{\mathrm{T}}(\omega) = \|H_1(\omega), H_2(\omega), \ldots, H_n(\omega)\|$ которых удовлетворяет неравенствам $\int_{-\infty}^{\infty} |H_k(\omega)|^2 \psi_{kk}(\omega) d\omega < \infty$ для заданной совокупности функций $\psi_{kk}(\omega)$, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда из изложенного следует, что функции $A_k^l(t)$, $l=1, 2, \ldots, m_k$; $k=1, 2, \ldots, n$ должны обладать такими свойствами, чтобы система (18) была разрешима в классе функций $L_2(T, \psi)$. До сих пор мы предполагали только, что $A_k^l(t) \in L_2(T)$ и $A_k(t) \in L_2(t)$. Для $A_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$ этого ограничения достаточно, а для $A_k^l(t)$, $l=1, \ldots, m_k$; $k=1, \ldots, n$ из условия их принадлежности к классу $L_2(T)$ еще не вытекает разрешимость системы (18) в $L_2(T, \psi)$. Чтобы уточнить вид необходимых дополнительных ограничений на $A_k^l(t)$, предположим, что $\psi_{kl}(\omega)$ являются рациональными функциями. Обозначим через $2s_k$ разность степеней полиномов знаменателя и числителя функции $\psi_{kk}(\omega)$, $k=1, 2, \ldots, n$; $s_k \geqslant 0$. Тогда в соответствии с [6] функции $A_k^l(t)$, $l=1, 2, \ldots, m_k$ для $t \in [0, T]$ должны обладать непрерывной производной (s_k-1)-го порядка, а производная указанных функций s_k-го порядка должна принадлежать $L_2(T)$. Если какая-либо из функций, например $A_{k_0}^{l_0}$, не удовлетворяет сформулированным условиям, то нетрудно показать, что в этом случае можно сформировать оценку коэффициента $a_{k_0}^{l_0}$ с нулевой дисперсией (сингулярный случай). Для практических приложений этот случай мало интересен.

Отметим, что указанные выше требования на функции $A_k^l(t)$ получены в предположении, что разность $2s$ степеней полиномов знаменателя и числителя $\det \|\psi_{kl}(\omega)\|$ удовлетворяла условию $\sum_{k=1}^{n} s_k = s$ (т. е. $\det \|\psi_{kl}(\omega)\|$ не имеет нуля на бесконечности). Это случай невырожденной [7]* или сильно невырожденной [6] матрицы $\|\psi_{kl}(\omega)\|$, имеющий основное значение для приложений.

Методы решения системы вида (18) для случая рациональной матрицы $\|\psi_{kl}(\omega)\|$ содержатся в [6, 8, 9] и др.

Формула (16) определяет вид аналоговой обработки, которой следует подвергнуть входной процесс $x_k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $k=1, 2, \ldots, n$ для образования статистик X_j^i. Линейные комбинации величин X_j^i с коэффициентами, определяющимися обратной матрицей алгебраической системы (13), дают в соответствии с (14) оценки неизвестных коэффициентов a_k^l, $l=1, 2, \ldots, m_k$; $k=1, 2, \ldots, n$.

Дисперсии оценок. В приложении 3 показано, что полученные оцен-

* См. в [7] подстрочное примечание на стр. 270.

ки $\hat{a}_k^l$ являются несмещенными. Дадим теперь выражение для матрицы $\| d_{pk}^{ql} \|$ дисперсий величин $\hat{a}_k^l$

$$d_{pk}^{ql} = M\{(\hat{a}_p^q - M\hat{a}_p^q)(\hat{a}_k^l - M\hat{a}_k^l)\}; \quad q = 1, 2, \ldots, m_p; \; p = 1, 2, \ldots, n;$$
$$l = 1, 2, \ldots, m_k; \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

С использованием (14) выражение (26) приводится к виду

$$d_{pk}^{ql} = \sum_{s,j=1}^{n} \sum_{t=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_j} \nu_{pj}^{qi} \nu_{ks}^{lt} \beta_{js}^{it}, \tag{27}$$

где

$$\beta_{js}^{it} = M\{(X_j^i - MX_j^i)(X_s^t - MX_s^t)\}. \tag{28}$$

Заменяя в (28) X_j^i выражением (16), после несложных преобразований получим $\beta_{js}^{it} = \mu_{sj}^{ti}$, что для (27) с учетом (13) дает

$$d_{pk}^{ql} = \nu_{pk}^{ql}. \tag{29}$$

Таким образом, матрица дисперсий оценок $\hat{a}_k^l$ совпадает с обратной матрицей системы (12).

Расчет точности измерений сводится к определению матрицы $\| d_{kp}^{lq} \|$. Ниже на конкретном примере показывается зависимость ошибок измерений от степени междуканальной корреляции шума.

Пример. Пусть

$$s_1(t) = a_1^1 A_1^1(t); \quad s_2(t) = a_2^1 A_2^1(t); R(t) = \sigma^2 \rho(t) \begin{Vmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{Vmatrix}; \; 0 \leqslant p < 1.$$

Пусть $h_j^0(t)$ — решение уравнения

$$\int_0^T \rho(t-\tau) h_j^0(\tau)\, d\tau = A_j^1(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \; j = 1, 2.$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$h_{11}^1(t) = \frac{1}{\sigma^2(1-p^2)} h_1^0(t); \quad h_{21}^1(t) = -\frac{p}{\sigma^2(1-p^2)} h_1^0(t);$$
$$h_{12}^1(t) = -\frac{p}{\sigma^2(1-p^2)} h_2^0(t); \; h_{22}^1(t) = \frac{1}{\sigma^2(1-p^2)} h_2^0(t).$$

Матрица $\| \mu_{jp}^{iq} \|$ имеет вид

$$\mathbf{M} = \| \mu_{jp}^{iq} \| = \begin{Vmatrix} \mu_{11}^{11} & \mu_{12}^{11} \\ \mu_{21}^{11} & \mu_{22}^{11} \end{Vmatrix} = \frac{1}{\sigma^2(1-p^2)} \begin{Vmatrix} \lambda_{11} & -p\lambda_{12} \\ -p\lambda_{12} & \lambda_{22} \end{Vmatrix},$$

где

$$\lambda_{11} = \int_0^T A_1^1(t) h_1^0(t)\, dt; \quad \lambda_{22} = \int_0^T A_2^1(t) h_2^0(t)\, dt;$$
$$\lambda_{12} = \int_0^T A_1^1(t) h_2^0(t)\, dt = \int_0^T A_2^1(t) h_1^0(t)\, dt.$$

Тогда матрицей дисперсий D будет

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1} = \frac{\sigma^2(1-p^2)}{\lambda_{11}\lambda_{22} - p^2\lambda_{22}^2} \begin{Vmatrix} \lambda_{22} & p\lambda_{12} \\ p\lambda_{12} & \lambda_{11} \end{Vmatrix}.$$

Если $p=0$, т. е. шумы между каналами не коррелированы, то оценки $\hat{a}_1^1$ и $\hat{a}_2^1$ также между собой не коррелированы, а их дисперсии имеют соответственно значения σ^2/λ_{11} и σ^2/λ_{22}. Если же $p \to 1$ и функции $A_1^1(t)$, $A_2^1(t)$ независимы на $[0, T]$, то (вследствие того, что в этом случае $\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}^2>0$) все элементы матрицы стремятся к нулю. В случае зависимых $A_1^1(t)$ и $A_2^1(t)$ при $p \approx 1$ матрица дисперсий оценок имеет вид (в этом случае $\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}^2 \approx 0$)

$$\mathbf{D} \approx \frac{\sigma^2}{\lambda_{12}^2}\left\| \begin{matrix} \lambda_{22} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{11} \end{matrix} \right\|.$$

Заключение. Сформулируем полученный результат.

Пусть в многоканальной системе на интервале времени $[0, T]$ наблюдается процесс $x_k(t)=s_k(t)+n_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$, где $s_k(t)$ имеет вид (3), а $n_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$ — стационарный гауссов шум с корреляционной матрицей $\|R_{kl}(t-\tau)\|$. Тогда, если

1) матрица $\|R_{kl}(t-\tau)\|$ является непрерывной ($0 \leqslant t$; $\tau \leqslant T$) и строго положительно определенной;

2) $A_k(t) \in L_2(T)$, $A_k^l(t) \in L_2(T)$, $l=1,2,\ldots, m_k$; $k=1,2,\ldots, n$;

3) $A_k^l(t)$, $l=1, 2, \ldots, m_k$ независимы при любом фиксированном $k=1, 2, \ldots, n$;

4) $A_k^l(t)$, $l=1,2, \ldots, m_k$; $k=1, 2, \ldots, n$ таковы, что система интегральных уравнений (18) разрешима в классе $L_2(T, \psi)$, то оценки максимального правдоподобия $\hat{a}_k^l$ коэффициентов a_k^l **определяются** формулой (14), в которой:

1) X_j^i в соответствии с (16) является выходным эффектом n-канального фильтра (всего необходимо $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ таких фильтров) с вектором весовых функций $h_j^i(t)=\|h_{1j}^i(t), h_{2j}^i(t), \ldots, h_{nj}^i(t)\| \in L_2(T, \psi,)$, являющегося решением системы интегральных уравнений (18);

2) ν_{pj}^{ql} — элемент матрицы $\|\nu_{pj}^{ql}\|$, обратной к матрице $\|\mu_{pj}^{ql}\|$, а μ_{pj}^{ql} определяется формулой (17).

Указанные оценки являются несмещенными, а матрица $\|d_{kp}^{lq}\|$ их дисперсий совпадает с матрицей $\|\nu_{kp}^{lq}\|$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Единственность решения системы (12). В соответствии с (11) матрица этой системы симметрична, т. е. $\mu_{jp}^{iq}=\mu_{pj}^{qi}$. Докажем, что она является положительно определенной, т. е. для любого набора чисел $d_j^i, i=j,2,\ldots, m_j$; $j=1,2,\ldots, n$ из равенства

$$\sum_{j,p=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j}\sum_{q=1}^{m_p}\mu_{jp}^{iq}\, d_j^i d_p^q=0 \tag{П.1}$$

следует $d_j^i=0$ для всех i и j. Тогда (12) будет иметь отличный от нуля определитель и единственное решение.

Введем вектор-столбец $\mathbf{A}_j^i$, у которого в j-й строке стоит элемент A_j^i, а остальные элементы нулевые; введем также вектор-столбец $\mathbf{h}_j^i(t)$ с элементами $h_{sj}^i(t)$, $s=1, 2,\ldots, n$. Тогда (15) и (16) можно записать в виде

$$\mu_{jp}^{iq}=\int_0^T[\mathbf{h}_p^q(t)]^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}_j^i(t)\,dt; \tag{П.2}$$

$$\int_0^T \mathbf{R}(t-\tau)\,\mathbf{h}_j^i(\tau)\,d\tau=\mathbf{A}_j^i(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{П.3}$$

где $(\ \ )^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования. Заменяя $A_j^i(t)$ в (П.2) левой частью (П.3), для (П.1) получим выражение

$$\int_0^T \int_0^T \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{R}(t-\tau)\,\mathbf{G}(\tau)\,dt d\tau = 0, \qquad (\text{П}.4)$$

где вектор-столбец $\mathbf{G}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} d_k^l\, \mathbf{h}_k^l(t) \in L_2(T, \psi)$ и, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\int_0^T \mathbf{R}(t-\tau)\,\mathbf{G}(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} d_k^l\, \mathbf{A}_k^l(t);\quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (\text{П}.5)$$

Вследствие положительной определенности ядра $R(t-\tau)$ для всякой векторной функции $\mathbf{G}(t) \in L_2(T, \psi)$ из (П.4) следует, что $\mathbf{G}(t) = 0$ (эквивалентна нулю). А тогда (П.5) дает

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} d_k^l\, \mathbf{A}_k^l(t) = \mathbf{0};\ 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (\text{П}.6)$$

Векторы $\mathbf{A}_k^l(t)$ $l = 1, 2, \ldots, m_k$; $k = 1, 2, \ldots, n$ являются независимыми. При любом фиксированном k это следует из предположения независимости функций $A_k^l(t)$, $l = 1, 2, \ldots, m_k$; $0 \leqslant t \leqslant T$. Для различных же k независимость перечисленных векторов очевидна, так как в этом случае они различаются номером ненулевой координаты. А тогда из (П.6) следует $d_k^l = 0$, $l = 1, 2, \ldots, m_k$; $k = 1, 2, \ldots, n$, что и требовалось доказать

2. Доказательство соотношения (20). Введем матрицу $\mathbf{\Phi}(t) = \| \varphi_{ks}(t) \|$, где $\varphi_{ks}(t) \equiv \varphi_k^s(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $s = 1, 2, \ldots$. Тогда (19) и (20) можно записать соответственно в виде:

$$\int_0^T \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{\Phi}(t)\,dt = \mathbf{E}_\infty; \qquad (\text{П}.7)$$

$$\mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau) = \mathbf{E}_n\,\delta(t-\tau);\quad 0 \leqslant t;\ \tau \leqslant T, \qquad (\text{П}.8)$$

где $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{E}_\infty$ — единичные матрицы порядка $n \times n$ и $\infty \times \infty$. Соотношение (П.8) означает, что для любого непрерывного на $[0, T]$ вектора-столбца $\mathbf{f}(t)$ справедливо равенство

$$\int_0^T \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(t)\{\mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau)\}\,dt = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\tau);\quad 0 \leqslant \tau \leqslant T. \qquad (\text{П}.9)$$

Так как ядро $\mathbf{R}(t-\tau)$ по предположению является положительно определенным, то столбцы матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ представляют собой систему векторных функций, ортонормированную в соответствии с (П.7) и полную в $L_2(T)$*. А тогда для любого вектора-столбца $\mathbf{f}(t) \in L_2(T)$ имеет место разложение (сходимость в среднем)

$$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}(t) = \left\{ \int_0^T \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathbf{\Phi}(s)\,ds \right\} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t). \qquad (\text{П}.10)$$

Теперь справедливость соотношения (П.9) (а значит, (П.8) и (20)) устанавливается непосредственной подстановкой (П.10) в левую часть (П.9) с использованием (П.7).

3. Доказательство несмещенности оценок. В соответствии с (12), (16) и (17)

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m_p} \mu_{ip}^{iq} M a_p^q = M X_j^i = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m_p} a_p^q \int_0^T A_p^q(t)\,h_{pj}^i(t)\,dt = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m_p} \mu_{pj}^{qi} a_p^q.$$

* Здесь $L_2(T)$ — пространство не скалярных, а векторных функций.

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m_p}\mu_{jp}^{iq}\,M\hat{a}_p^q = MX_j^i; \quad \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m_p}\mu_{jp}^{iq}\,a_p^q = MX_j^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m_j; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

По доказанному определитель этих систем отличен от нуля, откуда и следует $M\hat{a}_p^q = a_p^q$.

Так как $\mu_{jp}^{iq} = \mu_{pj}^{qi}$ то последние соотношения эквивалентны двум алгебраическим системам:

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Фортус, А. М. Яглом. Оценка коэффициентов линейной комбинации заданных функций в присутствии шума с рациональным спектром.— Проблемы передачи информации, 1963, вып. 14.
2. Ch. Striebel. Densities for stochastic processes.— Ann. of Math. Stat., 1959, v. 30. pp. 559—567.
3. В. Ф. Писаренко, Ю. А. Розанов. О некоторых задачах для стационарных процессов, приводящих к интегральным уравнениям, родственным уравнению Винера — Хопфа. — Проблемы передачи информации, 1963, вып. 14.
4. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. Гауссовские процессы. М., «Наука», 1970.
5. E. J. Kelly, W. L. Root. A Represantation of Vector-valued Random Processes.— Journal Math. and Phys., 1960, v. 39, № 3.
6. В. Ф. Писаренко. Уравнение типа Винера — Хопфа для многомерных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.— Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 4.
7. А. М. Яглом. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. V, вып. 3.
8. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
9. А. З. Киселев. Один метод решения векторного уравнения линейной фильтрации — Радиотехника и электроника, 1971, т. 16, № 3.

Поступила в редакцию 5 февраля 1971 г.