Доказанная теорема сводит исходную задачу определения точки, в которой функция $n$ переменных $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ достигает наибольшего значения, к задаче определения точки, в которой достигает наибольшего значения функция одной переменной $\Psi(x_1, 0, \ldots, 0)$. Решение этой последней задачи не представляет труда, тем более, что функция $\Psi(x_1)$ является выпуклой вверх. Это следует из того, что если некоторая функция $f(x)$ выпукла вверх, то и $\ln f(x)$ также является функцией выпуклой вверх. В заключение отметим, что при выборе в качестве критерия $\mathrm{Sp}K$ система (4), (5) будет иметь тот же вид, но при этом

$$\Phi_s = \sum_{j=1}^{p} \frac{\dfrac{\partial \varphi_j \left\{T_{\text{н}} + \sum\limits_{k=1}^{s} x_k + (s-1)\Delta t\right\}}{\partial x_s}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_j \left\{T_{\text{н}} + \sum\limits_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\Delta t\right\}\right]^2}.$$

Если все $\varphi_j(t)$ выпуклы в одну сторону, то лемма и теоремы 1—4 остаются в силе и в этом случае.

*Поступила в редакцию 4 марта 1971 г.,*
*окончательный вариант — 10 апреля 1972 г.*

---

УДК 519.2 : 62-50

**В. П. КУЗНЕЦОВ, Е. П. ЧУРАКОВ**
*(Рязань)*

# ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНКИ ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ МНОГИМИ УСТРОЙСТВАМИ В УСЛОВИЯХ ГАУССОВЫХ ШУМОВ

**Введение и постановка задачи.** В различного рода задачах автоматической обработки информации, связанных с проблематикой систем управления, распознавания образов, радиолокации, гидроакустики и т. п., возникает необходимость отыскания оптимальной оценки $\hat{\vec{\vartheta}}$ некоторого вектора $\vec{\vartheta}$ размерности $\nu$ на основании измерений, проведенных $r > \nu$ устройствами. Суть задачи сводится к следующему: информация о мгновенном значении вектора $\vec{\vartheta}$ выдается $r$ устройствами в виде некоторых нелинейных функций, искаженных шумами, так что

$$v_i = f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i) + p_i; \quad i = \overline{1, r}, \tag{1}$$

где $v_i$ — показание $i$-го прибора; $f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i)$ — полезная составляющая сигнала; $p_i$ — шум. Предполагается, что параметр $\vec{\vartheta}$ принадлежит некоторой известной и ограниченной области Г, а каждый из измерительных приборов настроен на определенное фиксированное значение вектора $\vec{\vartheta}$ в этой области, так что совокупность этих значений с некоторым шагом дискретности заполняет область Г. Последнее обстоятельство приводит к тому, что $f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i) = \max$ при $\vec{\vartheta} = \vec{Q}_i$, где $\vec{Q}_i$ — вектор, характеризующий пространственную ориентацию $i$-го прибора в области Г. Задача заключается в отыскании оценки $\hat{\vec{\vartheta}}$ по совокупности мгновенных показаний измерительных устройств $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$.

**Процедура линеаризации.** Наиболее общим решением задачи можно считать байесовский подход [1], основанный на минимизации среднего риска

$$M_{\vec{v}, \vec{\vartheta}}\{c(\vec{\vartheta}, \hat{\vec{\vartheta}})\} = \min, \tag{2}$$

где $c(\vec{\vartheta}, \hat{\vec{\vartheta}})$ — выбранная функция стоимости; $M_{\vec{v}, \vec{\vartheta}}$ — символ осреднения по пространствам возможных показаний приборов $\vec{V}$ и значений вектора $\vec{\vartheta}$. В случае квадратичной функции стоимости $c(\vec{\vartheta}, \hat{\vec{\vartheta}}) = \|\vec{\vartheta} - \hat{\vec{\vartheta}}\|^2$ минимизация функционала (2) приводит к известной оценке вида

$$\hat{\vec{\vartheta}} = \int_{\Gamma} \vec{\vartheta} F(\vec{V}/\vec{\vartheta})\, W(\vec{\vartheta})\, d\vec{\vartheta} \left[\int_{\Gamma} F(\vec{V}/\vec{\vartheta})\, W(\vec{\vartheta})\, d\vec{\vartheta}\right]^{-1}, \tag{3}$$

где $F(\vec{V}/\vec{v})$ — условная плотность наблюденных данных (функция правдоподобия); $W(\vec{\vartheta})$ — априорная плотность вероятности вектора $\vec{\vartheta}$. К сожалению, современная теория решений при нелинейной связи векторов $\vec{V}$ и $\vec{\vartheta}$ не дает конструктивных рекомендаций по получению на основании (3) оценки $\hat{\vec{\vartheta}}$ в виде явной зависимости $\hat{\vec{\vartheta}} = \hat{\vec{\vartheta}}(\vec{V})$. Поэтому при определении оценки в соответствии с (3) на практике приходится прибегать или к различного рода итеративным процедурам [2], или к моделированию соотношения (3) [3], или к различным формам приближенной линеаризации нелинейных соотношений [4—6]. Первый и второй из этих подходов не позволяют аналитически выявить зависимость искомых оценок от наблюденного вектора $\vec{V}$; помимо этого, второй подход сопряжен с необходимостью использования сложного вычислительного оборудования, что на практике не всегда возможно. Поэтому при решении задачи воспользуемся возможностями третьего подхода.

Предположим, что на основании предварительных грубых исследований или в соответствии с априорными данными определена некоторая подобласть Г′ области Г (Г′⊂Г), которой принадлежит вектор $\vec{\vartheta}$. Очевидно, что совокупность полезных составляющих показаний измерительных устройств $f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_p)$, $p = \overline{1, q}$, ориентированных на подобласть Г′ априорного расположения вектора $\vec{\vartheta}$, можно трактовать как $q$-мерную выборку функции $f(\vec{\vartheta}, \vec{Q})$. Аппроксимируем эту функцию рядом

$$f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}) = \sum_{k=1}^{q} a_k f(\vec{\vartheta}_k, \vec{Q}), \quad q < r. \tag{4}$$

Здесь $\vec{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_q)$ — вектор неизвестных коэффициентов; $\vec{\vartheta}_k$, $k = \overline{1, q}$ — совокупность дискретных значений вектора $\vec{\vartheta}$ из пространства Г′ (например, можно положить $\vec{\vartheta}_k = \vec{Q}_k$, где $\vec{Q}_k$ принадлежат подобласти Г′). Физически аппроксимация (4) означает, что показания ориентированных на подобласть Г′ приборов, обусловленные параметром $\vec{\vartheta}$, заменяются эквивалентными показаниями, порожденными $q$ параметрами $\vartheta_k, k = \overline{1, q}$, каждый из которых привязан к фиксированной точке подобласти Г′, например к точке $\vec{\vartheta}_k = \vec{Q}_k$. Теперь показания всех измерительных устройств в области Г, обусловленные параметром $\vec{\vartheta}$, можно приближенно выразить через показания приборов в подобласти Г′:

$$\vec{V} \cong \vec{F}\vec{A} + \vec{P}, \tag{5}$$

где $\vec{F} = \| f(\vec{\vartheta}_j, \vec{Q}_i) \|$; $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, q}$ — прямоугольная матрица порядка $r \times q$; $\vec{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$ — вектор шума. Для определенности условимся, что в (5) нумерация вначале осуществляется по подобласти Г′, а затем по остальной части области Г.

Строго говоря, соотношение (4) справедливо лишь для подобласти Г′; показания же приборов в остальной части пространства Г, определяемые оцениваемым параметром $\vec{\vartheta}$ в соответствии с (1), будут отличаться от их аппроксимации (5), следствием чего явится вектор невязок $\vec{\Delta}$

$$\vec{\Delta} = \vec{f} - \vec{F}\vec{A}, \tag{6}$$

где $\vec{f} = (f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_1), \; f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_2), \ldots, f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_r))$ — вектор истинных показаний приборов. В силу правомочности (4) в подобласти Г′ имеем

$$\vec{A} = \vec{F}_{1,q}^{-1} \vec{f}_{1,q} \tag{7}$$

и, следовательно,

$$\vec{\Delta} = \vec{f} - \vec{F}\vec{F}_{1,q}^{-1}\vec{f}_{1,q}, \tag{8}$$

где $\vec{F}_{1,q}$ и $\vec{f}_{1,q}$ образуются соответственно из $\vec{F}$ и $\vec{f}$ путем вычеркивания последних $r-q$ строк (заметим, что в соответствии с (8) первые $q$ элементов вектора $\vec{\Delta}$ равны нулю).

Для того чтобы аппроксимация полезных составляющих показаний приборов посредством (5) была несмещенной относительно истинных показаний, определяемых вектором $\vec{f}$, представим (5) в виде

$$\vec{V} \cong \vec{F}\vec{A} + \vec{\bar{\Delta}} + \vec{P}, \tag{9}$$

где $\vec{\bar{\Delta}}$ — среднее значение вектора невязок, т. е.

$$\vec{\bar{\Delta}} = M_{\vec{\vartheta}} \{\vec{f} - \vec{F}\vec{F}_{1,q}^{-1}\vec{f}_{1,q}\}. \tag{10}$$

**Оценка вектора.** Используя известный аппарат теории статистических решений [1], на основании (9) можем найти оптимальную оценку вектора $\vec{A}$, минимизирующую средний риск

$$M_{\vec{V}, \vec{A}} \{c(\vec{A}, \hat{\vec{A}})\}. \tag{11}$$

При квадратичной функции стоимости $c(\vec{A}, \hat{\vec{A}}) = \| \vec{A} - \hat{\vec{A}} \|^2$ и «расплывчатой» плотности вероятности вектора $\vec{A}$ для случая гауссовских помех минимизации (11) дает

$$\hat{\vec{A}} = \vec{D}^{-1} \tilde{\vec{F}} \vec{K}^{-1} \vec{V}^*. \tag{12}$$

Здесь $\vec{K} = \| M(p_i p_j) \|$, $i, j = \overline{1, r}$ — корреляционная матрица помех; $\vec{D} = \tilde{\vec{F}} \vec{K}^{-1} \vec{F}$ — квадратная симметричная матрица порядка $q$; $(\sim)$ —

символ транспонирования; $\vec{V}^*=\vec{V}-\vec{\vec{\Delta}}$. При помехах $p_i \in N(0, \sigma^2)$ и $\vec{K}=\sigma^2\|\delta_{ij}\|$ ($i, j=\overline{1, r}$, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера) соотношение (12) принимает более простой вид

$$\hat{\vec{A}}=\vec{D}^{-1}\tilde{\vec{F}}\vec{V}^*,\ \vec{D}=\tilde{\vec{F}}\vec{F}. \tag{13}$$

Располагая оценками вектора $\vec{A}$, можем найти и оценки вектора $\vec{f}_{1,q}$, представляющего совокупность полезных составляющих показаний, ориентированных на подобласть $\Gamma'$ измерительных устройств

$$\hat{\vec{f}}_{1,q}=\vec{F}_{1,q}\hat{\vec{A}}. \tag{14}$$

Эти оценки позволяют перейти к искомым оценкам вектора $\vec{\vartheta}$ в соответствии с очевидным соотношением

$$\vec{f}_{1,q}(\hat{\vec{\vartheta}}, \vec{Q})=\hat{\vec{f}}_{1,q}. \tag{15}$$

При практическом использовании соотношения (15) целесообразно воспользоваться следующим подходом. Выделим из всех $q$ оценок (14) $\nu$ наибольших по величине. Пронумеруем выделенные оценки в порядке уменьшения их значений, так что $\hat{f}_1^* > \hat{f}_2^* > \cdots > \hat{f}_\nu^*$. Векторы пространственной ориентации приборов, характеризующихся оценками $\hat{f}_1^*, \hat{f}_2^*, \ldots, \hat{f}_\nu^*$, обозначим соответственно через $\vec{Q}_1^*, \vec{Q}_2^*, \ldots, \vec{Q}^*$. Так как в соответствии со свойствами функции $f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i)$ имеем $f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i)=\max$ при $\vartheta=\vec{Q}_i$, то можно ожидать, что вектор $\vec{\vartheta}$ принадлежит той части подобласти $\Gamma'$, на которую ориентированы приборы с выделенными оценками полезных составляющих сигналов. Представим искомую оценку в виде

$$\hat{\vec{\vartheta}}=\vec{Q}_1^*+\hat{\vec{\varepsilon}}, \tag{16}$$

где $\hat{\vec{\varepsilon}}$ — вектор поправок. В соответствии с (15) имеем

$$f(\vec{Q}_1^*+\hat{\vec{\varepsilon}}, \vec{Q}_k^*)=\hat{f}_k^*;\quad k=\overline{1, \nu}. \tag{17}$$

Разлагая левую часть (17) в ряд Тэйлора по степеням вектора $\hat{\vec{\varepsilon}}$ и ограничивая разложение приемлемым числом членов, получим систему уравнений для определения компонент вектора $\hat{\vec{\varepsilon}}$. При малом шаге квантования пространства $\Gamma$ достаточно ограничиться первыми двумя членами ряда Тэйлора.

**Моделирование частного случая.** С целью подтверждения возможностей изложенного подхода было проведено моделирование на ЭЦВМ «БЭСМ-6» процедуры определения оценки вектора $\vec{\vartheta}=(\alpha, \beta)$ нелинейной функции вида

$$f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i)=u_0\left|\frac{\sin(\alpha-c_i)}{\alpha-c_i}\right|\left|\frac{\sin(\beta-d_i)}{\beta-d_i}\right|;\ i=\overline{1, 16}.$$

Вектор оцениваемых параметров $\vec{\vartheta}=(\alpha, \beta)$ принимал в процессе моделирования несколько различных значений из области $\Gamma'=\{(\alpha, \beta): 0\leqslant\alpha\leqslant\pi, 0\leqslant\beta\leqslant\pi\}$, причем

$$\Gamma'\subset\Gamma=\{(c, d): 0\leqslant c\leqslant 2\pi, 0\leqslant d\leqslant 2\pi\}.$$

Значения вектора $\vec{Q}_i=(c_i, d_i)$, принадлежащего пространству $\Gamma$, задавались в табл. 1.

Таблица 1

| $i$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $\overset{1}{4}$ | $4^2$ | $\overset{3}{4}$ | $4^4$ | $4^5$ | $\overset{6}{4}$ | $\overset{7}{4}$ | $\overset{\circ}{4}$ | $\hat{4}$ | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

Для моделирования помех использовалась стандартная программа получения случайных независимых чисел в нормальном распределении с единичной дисперсией. Эксперимент был проделан для различных отношений сигнал/шум$=u_0/\sigma$ путем изменения $u_0$.

Матрица $\vec{F}=\|f(\vec{\vartheta}_j, \vec{Q}_i\|$, $i=\overline{1,16}$, $j=\overline{1,4}$ имеет размерность $16\times4$. Значения вектора $\vec{\vartheta}_j$ определяются первыми четырьмя столбцами приведенной выше таблицы. Результаты моделирования сведены в табл. 2.

Таблица 2

| $\frac{u_0}{\sigma}$ | $\alpha=1,57$ | | $\beta=1,57$ | | $\alpha=2,74$ | | $\beta=2,74$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\hat{\alpha}_{\text{ср}}$ | $D_{\hat{\alpha}}$ | $\hat{\beta}_{\text{ср}}$ | $D_{\hat{\beta}}$ | $\hat{\alpha}_{\text{ср}}$ | $D_{\hat{\alpha}}$ | $\hat{\beta}_{\text{ср}}$ | $D_{\hat{\beta}}$ |
| 3 | 1,44 | 0,231 | 1,49 | 0,252 | 2,58 | 0,12 | 2,79 | 0,261 |
| 5 | 1,27 | 0,22 | 1,47 | 0,148 | 2,62 | 0,043 | 2,78 | 0,026 |
| 7 | 1,54 | 0,093 | 1,56 | 0,155 | 2,66 | 0,079 | 2,76 | 0,049 |
| 9 | 1,4 | 0,019 | 1,54 | 0,052 | 2,65 | 0,05 | 2,71 | 0,04 |

Здесь $\hat{\alpha}_{\text{ср}}$, $\hat{\beta}_{\text{ср}}$ — осредненные по десяти экспериментам значения оценок компонент вектора $\vec{\vartheta}$; $D_{\hat{\alpha}}$, $D_{\hat{\beta}}$ — дисперсии этих оценок, найденные как

$$D_{\hat{\alpha}}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(\alpha_i-\hat{\alpha}_{\text{ср}})^2.$$

**Заключение.** В работе изложен приближенный способ оценки векторного параметра по мгновенным показаниям многих измерительных устройств, нелинейно зависящим от оцениваемого параметра и искаженным гауссовскими шумами. Метод предполагает наличие информации о подобласти $\Gamma'$ расположения вектора $\vec{\vartheta}$, что не является чрезмерно обременительным для практики, так как эта информация часто может быть почерпнута или из априорных сведений, или на основании предварительных грубых исследований (например, путем разбиения пространства $\Gamma$ на ряд равных подобластей с последующим сопоставлением их друг с другом по величине суммарных показаний приборов в каждой из подобластей). Использование изложенного подхода в частной задаче показало практическую приемлемость получаемых результатов даже при ограниченном числе экспериментов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи. Т. II М., «Советское радио», 1962.
2. Н. Н. Александровский, А. Н. Дейч. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.

3. G. O. Young. Optimum Space — Time Signal Processing and Parameter Estimation.— IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, 1968, 4, № 3.
4. И. А. Богуславский. О несмещенной оценке полезного сигнала, зависящего нелинейно от неизвестных параметров.— Автоматика и телемеханика, 1960, № 1.
5. Г. И. Бельчанский. К оценке нелинейной функции при наблюдении сигнала, содержащего помеху.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1967, № 2.
6. В. Н. Брандин, В. С. Лобачев. Об одном методе нелинейной оценки параметров.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 8.

*Поступила в редакцию 9 февраля 1971 г.*

---

УДК 62-501.46

**А. З. КИСЕЛЕВ**

*(Ленинград)*

# ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

С увеличением требований к точности работы измерительных систем приходится учитывать статистические свойства входного шума и ошибок измерений. Такой учет в ряде случаев позволяет существенно повысить точность измерений, хотя структура получающейся при этом измерительной системы может оказаться довольно сложной. По-видимому, к минимальным усложнениям приводит учет лишь корреляционных (спектральных) характеристик. В последнем случае входной шум и ошибки измерений удобно полагать гауссовскими процессами.

В случае поступления информации по нескольким каналам высокая точность может быть достигнута как за счет дублирования измерений, так и за счет учета внутри- и междуканальных статистических связей.

Ниже устанавливается аналитический алгоритм построения измерительной системы для получения оценок коэффициентов линейной комбинации заданных функций, поступающей по нескольким каналам с гауссовскими шумами. Для общности будет предполагаться, что по разным каналам поступают не обязательно одинаковые комбинации. Подобные задачи возникают в телеметрических системах, когда полезная информация в конечном итоге содержится в амплитудах сигналов заранее известной формы, в радиолокационных и акустических системах измерения величин отражающих поверхностей и т. д.

**Формулировка задачи.** Имеется $n$ каналов, в $k$-м из которых содержится сигнал $s_k(t)$ в аддитивной смеси с шумом $n_k(t)$, причем

$$s_k(t) = \sum_{l=1}^{m_k} a_k^l A_k^l(t), \tag{1}$$

где $a_k^l$ — неизвестные конечные константы (амплитудные множители); $A_k^l(t)$ — известные функции.

Требуется на основе наблюдения процесса $x_k(t) = s_k(t) + n_k(t)$ ($k=1, 2, \ldots, n$) на отрезке времени $[0, T]$ оценить значения коэффициентов $a_k^l$, $l=1, 2, \ldots, m_k$; $k=1, 2, \ldots, n$. Если оценки $\hat{a}_k^l$ коэффициентов $a_k^l$ найдены, то оценка $\hat{s}_k(t)$ сигнала $s_k(t)$ будет иметь вид

$$\hat{s}_k(t) = \sum_{l=1}^{m_k} \hat{a}_k^l A_k^l(t); \quad k = 1, 2, \ldots; \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$