7. В. В. Ольшевский, Э. И. Цветков. О толковании терминов, используемых в теории аппаратурного анализа случайных процессов.— В сб. докладов III Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ процессов и полей», т. I. Л., 1970.
8. С. Я. Виленкин. Об оценке среднего в стационарных процессах.— Теория вероятности и ее применение, т. IV, вып. 4, 1959.

Поступила в редакцию 25 июня 1972 г.

УДК 621.317.7

Я. Г. ХАИТ

(Харьков)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ УВЕЛИЧЕНИЯ ПАМЯТИ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКСТРАПОЛЯТОРА ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

Для непрерывного представления информации при дискретном контроле обычно используется фиксация последнего отсчета непрерывного процесса $x^*(iT)$ на интервале между отсчетами длиной T $(iT,\ iT+T)$. Средний квадрат ошибки (СКО) воспроизведения процесса $x(iT+\sigma T)$ в интервале значений σ (0,1) определяется как

$$\overline{\varepsilon}^2_{\Phi}(\sigma) = M\{[x^*(iT) - x(iT+\sigma T)]^2\}, \tag{1}$$

где $M\{\}$ — знак математического ожидания; $x^*(iT) = x(iT) + q(iT)$; $q(t)$ — ошибка цифрового изменения, обычно не коррелированная с процессом $x(t)$. Для стационарных процессов $x(t)$, $q(t)$

$$\overline{\varepsilon^2_{\Phi}}(\sigma) = 2R_{xx}(0) - 2R_{xx}(\sigma T) + R_{qq}(0), \tag{2}$$

где $R_{xx}(t)$, $R_{qq}(t)$ — корреляционные функции сигнала $x(t)$ и шума $q(t)$.

Для выбора интервала отсчетов T по заданной ошибке ориентиром служит либо максимальная величина СКО $\overline{\varepsilon^2_{\Phi}}(1)$, либо усредненная на интервале между отсчетами

$$\overline{\varepsilon^2_{\Phi}} = \int_0^1 \overline{\varepsilon^2_{\Phi}}(\sigma)\, d\sigma.$$

Очевидно, что измерение процесса имеет смысл, если СКО ошибки воспроизведения меньше дисперсии процесса, так как в противном случае в качестве значений процесса можно принять величину математического ожидания. Для случая фиксации отсчетов это условие не выдерживается даже в области сравнительно коррелированных отсчетов

$$R_{xx}(\sigma T) < 0{,}5R_{xx}(0),$$

и возникает необходимость в более точных методах обработки информации, чем фиксация отсчетов.

Точность воспроизведения процесса $x(t)$ при том же интервале T может быть увеличена за счет фиксации на интервале между отсчетами некоторой экстраполируемой величины

$$y_i = y\,[x^*(iT),\ x^*(iT-T),\ \ldots,\ x^*(iT-nT+T)].$$

Необходимость фиксации в данном случае определяется технической сложностью реализации демодулятора более высокого порядка. При этом параметры экстраполятора целесообразно определять таким образом, чтобы обеспечить минимум усредненного СКО.

Рассмотрим восстановление сигнала по отсчетам с помощью линейного экстраполятора с конечной памятью, который обладает целым рядом достоинств: малой длительностью переходных процессов при включении и сбоях экстраполятора и др. [1], а также тем, что он может быть синтезирован с помощью сравнительно простых методов [2].

Линейный экстраполятор осуществляет преобразование вида

$$yi = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^* (iT - kT), \tag{3}$$

где nT — память экстраполятора; a_k — коэффициенты.

Известно, что усредненный СКО воспроизведения сигнала с помощью экстраполятора (3) принимает минимальное значение при данном n, если величины a_k удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_l \left[R_{xx}(lT - kT) + R_{qq}(lT - kT)\right] - \int_0^1 R_{xx}(kT + T - \sigma T)\, d\sigma = 0 \tag{4}$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Поскольку увеличение памяти экстраполятора nT связано с усложнением процедуры решения системы (4) и увеличением затрат ресурсов ЦВМ при реализации экстраполятора, целесообразно оценить эффект снижения СКО с увеличением памяти для процессов с произвольными корреляционными функциями. Будем сравнивать СКО экстраполяции с памятью $(n-1)T$ и nT по относительному приращению ошибки

$$\delta_n = \frac{\overline{\varepsilon^2_{n-1}} - \overline{\varepsilon^2_n}}{\overline{\varepsilon^2_\text{ф}}} \text{ при } n \geqslant 2; \quad \delta_1 = \frac{\overline{\varepsilon^2_\text{ф}} - \overline{\varepsilon^2_1}}{\overline{\varepsilon^2_\text{ф}}}, \tag{5}$$

где $\overline{\varepsilon^2_{n-1}}$ — СКО экстраполяции с памятью $(n-1)T$; $\overline{\varepsilon^2_n}$ — СКО экстраполяции с памятью nT; $\overline{\varepsilon^2_\text{ф}}$ — СКО фиксации, определяемое интегрированием выражения (2):

$$\overline{\varepsilon^2_\text{ф}} = 2R_{xx}(0) - 2\int_0^1 R_{xx}(\sigma T)\, d\sigma + R_{qq}(0).$$

$\overline{\varepsilon^2_{n-1}}$, $\overline{\varepsilon^2_n}$ могут быть представлены как функции коэффициентов экстраполяции

$$\overline{\varepsilon^2_{n-1}} = \overline{\varepsilon^2}(a_{0,n-1},\ a_{1,n-1},\ \ldots,\ a_{n-2,\,n-1},\ 0);$$

$$\overline{\varepsilon^2_n} = \overline{\varepsilon^2}(a_{0,n},\ a_{1,n},\ \ldots,\ a_{n-2,\,n},\ a_{n-1,\,n}),$$

где $a_{k,n}$ — k-й оптимальный коэффициент экстраполятора с памятью nT.

Воспользуемся приведенным в [3] выражением для приращения ошибки вследствие неоптимальности коэффициентов $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}$

$$\overline{\varepsilon^2}(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}) - \overline{\varepsilon^2}(a_{0,n},\ a_{1,n},\ \ldots,\ a_{n-1,\,n}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \left[R_{xx}(lT - kT) + R_{qq}(lT - kT)\right](a_l - a_{l,n})(a_k - a_{k,n}). \tag{6}$$

Подставим в (6) вместо произвольных коэффициентов a_k оптимальные коэффициенты $a_{k,n-1}$ экстраполяции с памятью $(n-1)T$ и получим выражения для δ_n при $n \geqslant 2$

$$\delta_n = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \left[R_{xx}(lT - kT) + R_{qq}(lT - kT)\right](a_{l,\,n-1} - a_{l,n})(a_{k,n-1} - a_{k,n}) / \overline{\varepsilon^2_\text{ф}}.$$

(Здесь $a_{n-1,\ n-1}=0$).

Соответственно для δ_1 может быть получено выражение

$$\delta_1 = [R_{xx}(0) + R_{qq}(0)](1 - a_{0,1})^2/\overline{\varepsilon_\Phi^2}.$$

Для $n=2$, 3 нетрудно показать, что

$$\delta_n = \frac{D_n}{D_{n-1}} a_{n-1,n}^2/\overline{\varepsilon_\Phi^2}, \tag{7}$$

где D_n — определитель системы (5) n-го порядка, причем $D_1=R_{xx}(0)+R_{qq}(0)$.

Ввиду того, что анализ свойств δ_n в общем случае (при произвольных корреляционных функциях и значениях T) практически неосуществим, вначале оценим два предельных значения δ_n, соответствующих случаю некоррелированных отсчетов, т. е. когда интервал отсчетов T больше интервала корреляции процесса $x(t)$, и случаю бесконечно частных отсчетов ($T\to 0$). Благодаря непрерывности δ_n по T, эти предельные значения могут охарактеризовать эффективность увеличения памяти экстраполятора при сравнительно редких и частых отсчетах.

1. Значения δ_n при некоррелированных отсчетах отличны от нуля лишь при $n=1$, так как при $n>1$ $a_{n-1,\ n}=0$, а $D_n/D_{n-1}=R_{xx}(0)+R_{qq}(0)$.

При некоррелированных отсчетах

$$\delta_1 = \frac{\left[R_{xx}(0) + R_{qq}(0) - \dfrac{S_{xx}(0)}{2T}\right]^2}{[R_{xx}(0) + R_{qq}(0)]\left[2R_{xx}(0) + R_{qq}(0) - \dfrac{S_{xx}(0)}{2}\right]},$$

где $S_{xx}(0) = 2\int\limits_0^\infty R_{xx}(t)\,dt = 2\int\limits_0^T R_{xx}(t)\,dt$ — спектральная плотность процесса $x(t)$ при $\omega=0$. Нижняя оценка

$$\delta_1 > \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{S_{xx}(0)}{2T\,[R_{xx}(0) + R_{qq}(0)]}\right\}$$

позволяет увидеть, что при дальнейшем увеличении T величина δ_1 стремится к 1/2.

Обнаруженная неэффективность увеличения памяти экстраполятора при некоррелированных отсчетах подтверждает вполне очевидный факт. По-видимому, наибольший эффект от увеличения числа отсчетов следует ожидать при достаточно коррелированных, т. е. частых, отсчетах.

2. Значения δ_n при бесконечно частых отсчетах могут быть оценены с помощью разложения корреляционной функции процесса $x(t)$ и шума $q(t)$ в ряд Тейлора вокруг нуля для положительных t:

$$R(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} R^{(m)}(0+)\,t^m, \tag{8}$$

где $R^{(m)}(0^+)$ — производная m-го порядка от корреляционной функции $R_{xx}(t)$ или $R_{qq}(t)$ при $t\to 0$ справа. Представление $R_{xx}(t)$ в виде ряда Тейлора удобно также из тех соображений, что прогнозируемость процесса связана с его дифференцируемостью в среднеквадратичном.

В таблице даны предельные значения δ_n для оптимальной экстраполяции по одному, двум и трем отсчетам для недифференцируемого (т. е. с $R'_{xx}(0)\neq 0$), однократно дифференцируемого ($R'_{xx}(0)=0$, $R'''_{xx}(0)\neq 0$) и дважды дифференцируемого ($R'_{xx}(0)=R'''_{xx}(0)=0$) процессов при произвольном шуме. Из таблицы видно, что предельные значения $\lim\limits_{T\to 0}\delta_n$ конечны лишь при оптимальной экстраполяции

Значения $\lim\limits_{T\to 0} \delta_n$

Процесс	Один отсчет: без шума	Один отсчет: с шумом с дисперсией Δ^2	Два отсчета: без шума	Два отсчета: с шумом с дисперсией Δ^2	Три отсчета: без шума	Три отсчета: с шумом с дисперсией Δ^2
Недифференцируемый	0		0		0	
Однократно дифференцируемый	0	$\frac{\Delta^2}{1+\Delta^2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{(1+\Delta^2)(2+\Delta^2)}$ при $R_q(T)\neq 0$	0	$\frac{\Delta^2}{(2+\Delta^2)(1+3\Delta^2+\Delta^4)}$ при $R_q(T)=0$
Дважды дифференцируемый	0		$\frac{3}{4}$	0 при $R_q(T)\neq 0$	0	0 при $R_q(T)\neq 0$

по двум отсчетам дифференцируемого случайного процесса в отсутствие шума или корреляции между отсчетами шума.

$$\lim_{T\to 0}\delta_2 = \begin{cases} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{(1+\Delta^2)(2+\Delta^2)} \\ 0 \end{cases}$$

в отсутствие шума; при некоррелированных отсчетах шума; при наличии корреляции между отсчетами шума, где Δ^2 — дисперсия шума $q(t)$.

При этом для некоррелированных отсчетов шума эффективность уменьшается с ростом Δ^2. Во всех остальных случаях $\lim\limits_{T\to 0}\delta_n = 0$.

Поскольку δ_n тождественно не равно нулю, его нулевые значения при бесконечно частых и некоррелированных отсчетах свидетельствуют о наличии экстремума при промежуточных значениях интервала отсчетов T.

Для исследования поведения δ_n в зависимости от T были рассчитаны оптимальные коэффициенты, СКО экстраполяции и значения δ_n при экстраполяции по одному, двум и трем отсчетам для трех процессов:

1) недифференцируемого с

$$R_{xx}(t) = 2e^{-\alpha|t|} - e^{-\frac{\alpha}{2}|t|}, \tag{9}$$

2) однократно дифференцируемого с

$$R_{xx}(t) = 3e^{-\alpha|t|} - 2e^{-1,5\,\alpha|t|}, \tag{10}$$

3) сингулярного, т. е. имеющего все производные с

$$R_{xx}(t) = e^{-\alpha^2t^2}. \tag{11}$$

Исследование сингулярного процесса здесь проводится с целью выявления закономерностей экстраполяции не менее чем дважды дифференцируемых процессов.

На рис. 1—3 приведены графики СКО трех видов экстраполяции исследуемых процессов в отсутствие шума и при наличии «белого» шума с дисперсией $\Delta^2 = \frac{1}{12} R_{xx}(0)$ и соответствующие графики $\delta_n(\alpha T)$.

Анализ этих зависимостей показывает, что при отсутствии шума функции $\delta_1(\alpha T)$, $\delta_2(\alpha T)$ монотонны, причем $\delta_1(\alpha T)$ возрастает от 0 до 1/2 с увеличением αT от 0 до ∞ для всех процессов, $\delta_2(\alpha T)$ уменьшается от 3/4 до 0 с ростом αT для дифференцируемых процессов, $\delta_3(\alpha T)$ обращается в 0 при $\alpha T=0$ и $\alpha T\to\infty$ и имеет экстремум в области сравнительно частых отсчетов для дифференцируемых процессов, при-

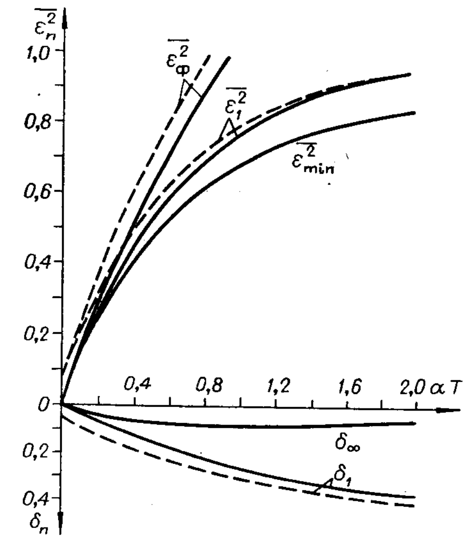

Рис. 1. Характеристики эффективности экстраполяции процесса с корреляционной функцией $R_{xx}(t) = 2e^{-\alpha|t|} - e^{-0,5\alpha|t|}$.

— в отсутствие шума; — — — — с шумом ($\Delta^2 = 1/12$).

чем даже больший из них по величине, относящийся к сингулярному процессу, по абсолютной величине мал (меньше 0,1).

Таким образом, может быть сделан вывод об эффективности оптимальной экстраполяции по одному редкому отсчету ($\alpha T > 1$) для любых процессов и по двум частым отсчетам ($\alpha T < 1$) только для дифференцируемых процессов при отсутствии шума, так как наличие шума снижает эффективность экстраполяции по двум частым отсчетам (см. рис. 2, 3).

Определение предельной точности воспроизведения сигнала по отсчетам с помощью оптимальной экстраполяции при неограниченном увеличении памяти возможно путем решения дискретного варианта винеровской задачи оптимальной экстраполяции с некоторой модификацией, заключающейся в минимизации усредненного на интервале отсчетов СКО экстраполяции непрерывного случайного процесса.

Однако аналитическое решение задачи здесь возможно лишь для дробно-рациональной спектральной плотности с многочленом знаменателя не выше четвертой степени и при отсутствии шума. Поэтому для

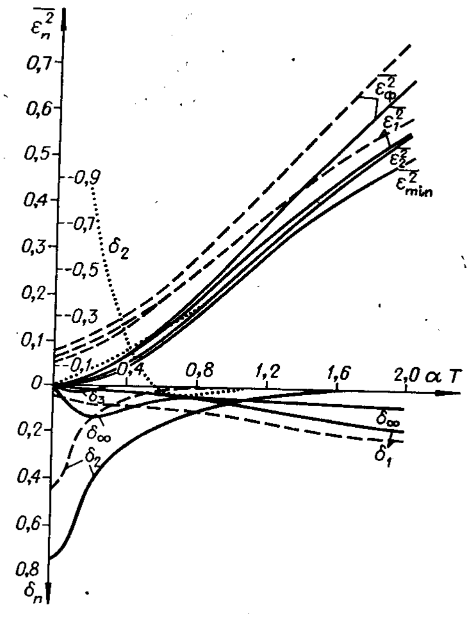

Рис. 2. Характеристики эффективности экстраполяции процесса с корреляционной функцией $R_{xx}(t) = 3e^{-\alpha|t|} - 2e^{-1,5\alpha|t|}$:

— в отсутствие шума; — — — — с шумом ($\Delta^2 = 1/12$); . . . — с ошибкой $\Delta R(t) = 0,05 \cos \frac{\pi}{T} t$.

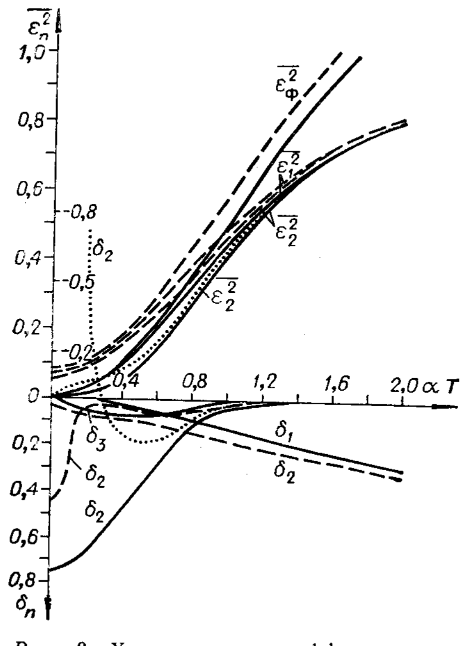

Рис. 3. Характеристики эффективности экстраполяции процесса с корреляционной функцией $R_{xx}(t) = e^{-\alpha^2 t^2}$:

— в отсутствие шума; — — — — с шумом ($\Delta^2 = 1/12$); . . . — с ошибкой $\Delta R(t) = 0,05 \cos \frac{\pi}{T} t$.

возможности сравнения с результатами экстраполяции с конечной памятью, сузим задачу, ограничившись экстраполяцией процесса, описываемого спектральной плотностью вида

$$S_{xx}(\omega) = C \frac{\mu\omega^2 + \gamma^2}{\omega^4 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2}, \tag{12}$$

где C, α, γ, μ — вещественные параметры; β — вещественный или мнимый параметр. Выражение (12) охватывает почти все используемые на практике модели недифференцируемых (при $\mu \neq 0$) и дифференцируемых (при $\mu = 0$) случайных процессов, в том числе и рассмотренных в примере, за исключением сингулярного.

Относительное уменьшение СКО экстраполяции при бесконечном увеличении памяти экстраполятора δ_∞ будем оценивать по отношению к экстраполяции по двум отсчетам

$$\delta_\infty = \frac{\overline{\varepsilon_2^2} - \overline{\varepsilon_{\min}^2}}{\overline{\varepsilon_\phi^2}} = 1 - \delta_1 - \delta_2 - \frac{\overline{\varepsilon_{\min}^2}}{\overline{\varepsilon_\phi^2}}, \tag{13}$$

где $\overline{\varepsilon_{\min}^2}$ — усредненный СКО экстраполяции с бесконечной памятью. Найдем предельные значения δ_∞:

$$\lim_{T \to 0} \delta_\infty = \begin{cases} \frac{1}{4} - \lim\limits_{T \to 0} \frac{\overline{\varepsilon_{\min}^2}}{\overline{\varepsilon_\phi^2}} & \text{для дифференцируемых процессов;} \\ 1 - \lim\limits_{T \to 0} \frac{\overline{\varepsilon_{\min}^2}}{\overline{\varepsilon_\phi^2}} & \text{для недифференцированных процессов.} \end{cases}$$

Используя разложение в ряд Тейлора для функции $R_{xx}(t)$, соответствующей $S_{xx}(\omega)$ [см. (12)], и $\overline{\varepsilon_{\min}^2}$ для процесса, описываемого (12), получим $\lim\limits_{T \to 0} \delta_\infty = 0$, т. е. экстраполяция по двум бесконечно частым отсчетам (а для недифференцируемых процессов соответственно по одному отсчету ввиду того, что $\lim\limits_{T \to 0} \delta_2 = 0$) обладает экстремальным свойством — дальнейшее увеличение памяти экстраполятора не снижает СКО экстраполяции.

Поведение δ_∞ при конечных значениях T можно исследовать на примерах, рассматривая экстраполяцию процессов (9), (10).

Графики $\overline{\varepsilon_{\min}^2}(\alpha T)$ и $\delta_\infty(\alpha T)$ нанесены на рис. 1, 2. Анализ зависимостей говорит о том, что эффективность оптимальной экстраполяции с бесконечной памятью по сравнению с экстраполяцией по одному-двум отсчетам невелика и увеличивается с ростом T. Это явление может быть истолковано таким образом, что информация, содержащаяся в слабо коррелированных отсчетах, может быть использована лишь при значительной памяти.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что если отсчеты измеряемого процесса слабо коррелированы (например, из-за малого быстродействия аппаратуры или необходимости ручной обработки измерений), то наиболее эффективным методом повышения точности является оптимальная экстраполяция по одному отсчету. При частых отсчетах максимальная точность воспроизведения сигнала практически достижима при экстраполяции по двум отсчетам для дифференцируемого процесса при отсутствии шума и путем обычной фиксации недифференцируемого процесса.

В заключение рассмотрим некоторые вопросы некорректности задачи синтеза оптимального экстраполятора с конечной памятью. Некорректность связана с тем, что система уравнений (4) имеет плохо обусловленную матрицу, и даже небольшие по модулю ошибки при задании корреляционной функции $R_{xx}(t)$ или в процессе вычисления оптимальных коэффициентов могут привести к значительному искажению результатов. Нас будет интересовать, как степень некорректности решения задачи экстраполяции связана с памятью экстраполятора.

Экстраполяция по одному отсчету вообще не обладает свойством некорректности, так как определитель системы в этом случае вырождается в величину $D_1 = R_{xx}(0) + R_{qq}(0)$, существенно отличную от нуля, и погрешность в определении корреляционной функции $\Delta R(t)$ приводит к погрешности того же порядка в определении оптимального коэффициента $\Delta a_{0,1}$ и СКО экстраполяции $\overline{\Delta\varepsilon_1^2}$:

$$\Delta a_{0,1} < \frac{\Delta R_m}{R_{xx}(0)}; \qquad \overline{\Delta\varepsilon_1^2} < \frac{2(\Delta R_m)^2}{(R_{xx}(0))^2},$$

где ΔR_m — максимальное значение $\Delta R(t)$.

Некорректность задачи экстраполяции проявляется с увеличением памяти до двух отсчетов и более. Определитель системы D_n в этом случае существенно зависит от интервала отсчетов T и уменьшается при уменьшении T.

Очевидно, что «степень некорректности» задачи экстраполяции может быть оценена по величине определителя D_n при прочих равных условиях. Анализ показывает, что если D_2 для дифференцируемого процесса в отсутствие шума в области частых отсчетов уменьшается как T^2, то соответственно D_3 — как T^5 и т. д.

Таким образом, с увеличением памяти экстраполяции значения D_n при малых T уменьшаются, что свидетельствует об увеличении «степени некорректности» задачи экстраполяции при увеличении памяти при постоянной величине T.

Это свойство может быть также проиллюстрировано необходимостью увеличения точности вычисления оптимальных коэффициентов с увеличением памяти экстраполяции: 3—4 десятичных знака при одном отсчете, 6 знаков при двух отсчетах, 8 знаков при трех отсчетах. При меньшей точности вычисления наблюдались столь значительные искажения оптимальных коэффициентов экстраполяции по двум и трем отсчетам, что величина СКО экстраполяции в отдельных случаях увеличивалась по сравнению с минимальной более чем на 100%.

С целью исследования влияния характера ошибок при задании корреляционных функций были вычислены оптимальные коэффициенты и СКО экстраполяции по двум отсчетам для процессов (10), (11) при двух типах ошибок корреляционных функций: 1) постоянная ошибка $\Delta R(t) = 0{,}05$; 2) колебательная ошибка $\Delta R(t) = 0{,}05 \cos \frac{\pi}{T} t$.

Частота колебательной ошибки равна половине частоты отсчетов, что, очевидно, должно дать наибольшие искажения результатов из-за перемены знака ошибки от отсчета к отсчету.

Если введение постоянной ошибки не привело к сколько-нибудь заметному искажению оптимальных коэффициентов, то колебательная ошибка внесла столь значительные искажения, что при малых T вызвала увеличение СКО до величин, больших, чем СКО фиксации (см. рис. 2, 3).

Результаты анализа ошибок при экспериментальном определении корреляционных функций, из которых основными являются ошибки, связанные с неучтенными помехами при измерении случайных процессов и конечностью обрабатываемой реализации случайного процесса, не дают гарантий того, что эти ошибки не будут высокочастотными. Таким образом, область применимости экстраполяции по двум отсчетам оказывается чрезвычайно узкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., «Физматгиз», 1960.
2. Э. Л. Ицкович, Э. А. Трахттенгерц. Алгоритмы централизованного контроля и управления производства. М., «Советское радио», 1968.
3. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных случайных функций.— Успехи математических наук, 1952, т. VII, вып. 5.

Поступила в редакцию 14 июля 1971 г.,
окончательный вариант — 23 декабря 1971 г.

УДК 519.24

А. А. МАЛИЦКИЙ
(Харьков)

О РАЦИОНАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Постановка задачи. В * рассмотрена задача рациональной организации процесса измерений постоянной величины Θ в случае, когда измеренная величина H представляет собой аддитивную смесь Θ и нестационарной нормальной помехи. Настоящая статья представляет собой продолжение и обобщение работы * на тот случай, когда одновременно измеряется несколько величин. Задача ставится следующим образом.

Измеряется некоторый вектор $\Theta=\{\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_p\}$. Результаты измерений H представляют собой аддитивную смесь Θ и векторной нестационарной нормальной помехи E:

$$H=\Theta+E.$$

В течение временного интервала $[T_н, T_к]$ необходимо провести n измерений вектора Θ, причем промежуток между соседними измерениями $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ должен быть не менее заданного Δt. Здесь t_k — момент проведения k-го измерения ($k=1, \ldots, n$). Длина заданного интервала $T_к-T_н$ позволяет провести более чем n измерений, т. е. $n\Delta t \leqslant T_к-T_н$. Необходимо оптимально (в смысле выбранного критерия) определить моменты измерений.

Выбор критерия. В результате обработки измерений получают оценку вектора Θ — вектор Θ^*, степень близости которого к вектору Θ характеризуется матрицей вторых моментов K вектора Θ^*.

В связи с этим целесообразно критерий эффективности измерений связать с некоторой характеристикой матрицы K. Так, можно в качестве критерия выбрать след матрицы $\mathrm{Sp}K$ или ее определитель $|K|$.

Определитель $|K|$ представляет собой, как известно, объем параллелепипеда, построенного на столбцах матрицы K. В интересующем нас случае нормальной помехи он однозначно связан с энтропией закона распределения вектора Θ^*: чем меньше $|K|$, тем меньше энтропия и, следовательно, тем большую информацию доставили измерения. При использовании в качестве критерия $|K|$ естественно стремиться к его минимизации или, что то же самое, к максимизации определителя непосредственно получаемой в результате обработки данных измерений матрицы K^{-1}. Однако $|K|$ может оказаться малым вследствие того,

* А. А. Малицкий, Л. Г. Раскин. Некоторые вопросы рациональной организации процесса измерений.— Автометрия, 1969, № 4.