имеют различное число степеней свободы, а такая ситуация очень часто встречается в практике.

На рис. 3 приведены теоретические и экспериментальные значения $\varphi_{xx}^{\text{о}}$, $\varphi_{xx}^{\alpha\text{о}}$, $\varphi_{xx}^{\alpha\text{ко}}$. $\bar{\varphi}_{xx}$ для $\Psi_{zz} = 0{,}05$ и $\Psi_{nn} = 0{,}02$. Можно отметить хорошее совпадение значений.

В заключение кратко остановимся на одном свойстве предлагаемых оценок (19) и (25). Можно показать, что величины $\nu_0 C_{xx}^{\alpha\text{о}}(\omega)/\Gamma_{xx}(\omega)$ и $\nu_k C_{xx}^{\alpha\text{ко}}(\omega)/\Gamma_{xx}(\omega)$ приближенно подчиняются χ^2-распределению с $\nu_0 = 2/\varphi_{xx}^{\alpha\text{о}}$ и $\nu_k = 2/\varphi_{xx}^{\alpha\text{ко}}$ степенями свободы соответственно. Это свойство позволяет построить доверительные интервалы для оценок $C_{xx}^{\alpha\text{о}}$ и $C_{xx}^{\alpha\text{ко}}$ (для фиксированного $\omega \in \Omega$) с заданным уровнем доверительности.

СССР, 1968, т. 182, № 1.
3. В. А. Морозов. Об оптимальной регуляризации операторных уравнений.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970, т. 10, № 4.
4. В. А. Морозов. О восстановлении функции методом регуляризации.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967, т. 7, № 4.
5. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3.
6. В. Н. Чукреев. Сравнение детерминированного и вероятностного подходов к восстановлению входных сигналов.— Труды семинара «Теория автоматического управления», вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1969.

Поступила в редакцию 28 марта 1972 г.,
окончательный вариант — 11 августа 1972 г.

УДК 681.833 : 519.2

А. Н. ДОМАРАЦКИЙ

(Новосибирск)

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ В ЗАДАЧЕ АВТОМАТИЗАЦИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Вопросам аппаратурного определения статистических характеристик случайных сигналов посвящен ряд монографий [1—5]. Однако состояние проблемы таково, что до сих пор отсутствуют общие рекомендации по разработке оперативных устройств обработки случайных сигналов. В настоящей работе предлагаются общие замечания к задаче автоматизации определения статистических характеристик случайных сигналов, которые будут полезны при разработке и осуществлении аппаратурных средств.

Как известно [6], при анализе случайных сигналов задача обработки экспериментальных данных сводится к нахождению таких функций результатов эксперимента, которые могут быть приняты за искомые характеристики случайных сигналов. При обработке стационарных эргодических случайных сигналов за оценку искомой вероятностной характеристики принимают среднее значение реализации соответствующего случайного сигнала на достаточно большом интервале наблюдения [7]. Будем обозначать случайные сигналы большими буквами, их реализации — соответствующими малыми буквами. Обозначим истинную статистическую характеристику и ее оценку, которые в общем случае могут быть функциями какого-либо параметра α, соответственно $Q(\alpha)$, $Q^*(\alpha)$. Тогда в принятых обозначениях для оценки вероятностной характеристики получим

$$Q^*(\alpha) = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t, \alpha)\, dt, \tag{1}$$

где под $\xi(t, \alpha)$ следует понимать реализацию, по которой определяется оценка. Представляя (1) в общем виде, имеем

$$Q^*(\alpha) = h_t h_\alpha \{x(t)\}, \tag{2}$$

где $h_\alpha\{x(t)\} = \xi(t, \alpha)$; h_α — оператор, лежащий в основе определения оценки $Q^*(\alpha)$; случайного сигнала $X(t)$ по его реализации $x(t)$; h_t — оператор усреднения, t — параметр усреднения. Как следует из (1), (2), операторы h_t, h_α в общем случае не обладают свойством перестановки и результат преобразования зависит от порядка действия операторов, т. е.

$$h_t h_\alpha \{x(t)\} \neq h_\alpha h_t \{x(t)\}. \tag{3}$$

В реализации автоматических устройств оперативного определения оценок вида (2) наиболее сложным является осуществление оператора h_α (назовем его основным оператором). Очевидно, можно найти множество произвольных операторов h_q, облегчающих практическую реализацию действия основного оператора, таких, что

$$h_q\{x(t)\} = y(\tau), \tag{4}$$

где $y(\tau)$ — промежуточная реализация, над которой просто осуществляются преобразования по правилу действия основного оператора и амплитудные изменения которой пропорциональны изменениям интересующих параметров исследуемой реализации $x(t)$. В частном случае

$$h_q\{x(t)\} = x(t). \tag{5}$$

Возможность введения дополнительных операторов позволяет найти такие операторы, которые значительно облегчают схемное построение устройств статистической обработки. Следует отметить, что неточное удовлетворение введенного оператора условию (5) вносит дополнительную погрешность в определение оценки. Однако если эту погрешность можно свести к минимуму или учесть в окончательном результате, то неточное удовлетворение условию (5) создает дополнительные возможности в схемном упрощении средств статистической обработки.

В случае определения характеристики случайного сигнала по дискретной выборке на интервале наблюдения его реализации оценка (2) определяется как

$$Q^*(\alpha) = h_n h_\alpha \{x(i\Delta t)\}, \tag{6}$$

где $\Delta t = T/n$; h_n — оператор нахождения среднего по дискретной выборке; T — время наблюдения реализации $x(t)$; n — количество ординат реализации, выбранных через интервал дискретизации Δt.

Оператор h_n обычно принимают равным

$$h_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}. \tag{7}$$

Оценка среднего с использованием оператора (7) является несмещенной и состоятельной [6]. Однако для упрощения устройств обработки часто целесообразнее применять рекуррентный алгоритм нахождения оценки среднего

$$a_n = a_{n-1} + \beta_n (x_n - a_{n-1}), \tag{8}$$

где $a_0 = 0$; β_n — ряд положительных чисел, меньших единицы. Выражение (8) легко привести к виду

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i \prod_{i}^{n-1} (1 - \beta_{i+1}), \tag{9}$$

где $\prod_{i}^{n-1} (1 - \beta_{i+1})$ определено только для $n - i \geqslant 1$.

Математическое ожидание и квадрат среднеквадратической ошибки a_n равны:

$$M[a_n] = m_{a_n} = m_x \sum_{i=1}^{n} \beta_i \prod_{i}^{n-1} (1 - \beta_{i+1}); \tag{10}$$

$$\sigma_{a_n}^2 = M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i \prod_{i}^{n-1} (1 - \beta_{i+1}) - m_x\right]^2. \tag{11}$$

После несложных преобразований в выражении (11) получим

$$\sigma_{a_n}^2 = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \prod_{i}^{n-1} (1 - \beta_{i+1})^2 + m_x^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i \prod_{i}^{n-1} (1 - \beta_{i+1}) - 1\right]^2. \tag{12}$$

Формулы (10) и (12) показывают, что ряд чисел β_i в общем случае дает смещенную и несостоятельную оценку среднего. В частном случае удается получить несмещенную и состоятельную оценку. Например, при $\beta_i = 1/i$ формула (12) дает

$$\sigma_{a_n}^2 = \frac{D_x}{n}, \tag{13}$$

а оценка среднего, определенная по алгоритму (8), эквивалентна оценке, вычисленной с использованием оператора (7).

Однако несостоятельность оценки среднего, определяемой по формуле (8), не является препятствием для ее практического применения, так как при проведении эксперимента всегда задается желаемая достижимая точность получаемых результатов обработки, с учетом которой можно выбрать требуемый ряд чисел β_i. При реализации устройств обработки интересным является случай, когда выполняется условие

$$\beta_i = \beta = \text{const} < 1. \tag{14}$$

С учетом условия (14) формулы (10) и (12) приводятся к виду:

$$m_{a_n} = m_x \sum_{i=1}^{n} \beta \sum_{j=0}^{n-1} (1)^j \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} \beta^j; \tag{15}$$

$$\sigma_{a_n}^2 = \sigma_x \beta^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{2(n-1)} (-1)^j \frac{[2(n-1)]!}{j!\,[2(n-1)-j]!} \beta^j +$$

$$+ m_x^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \beta \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} \beta^j - 1\right]^2. \tag{16}$$

Биномиальные ряды в (15) и (16) сходятся, а

$$B_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \beta \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} \beta^j = 1. \tag{17}$$

Формула (17) показывает, что при выполнении условия (14) оценка среднего, вычисленная по формуле (8), становится асимптотически несмещенной, а $\sigma^2_{a_n}$ сходится к величине

$$D_n = \lim_{n\to\infty} \sigma^2_{a_n} \approx \beta^2\sigma^2_x. \tag{18}$$

Скорость сходимости зависит от величины β. На рис. 1, 2 представлены графики, показывающие сходимость B_n и D_n в зависимости от длины дискретной выборки n при различных β. Из приведенных графиков следует, что при реализации устройств обработки следует выбирать величину β так, чтобы на первых шагах рекуррентной формулы (8) обеспечивалась быстрая сходимость, хотя и с большой среднеквадратической ошибкой, далее следует уменьшить β до величины, обеспечивающей требуемую точность определения среднего. Причем изменение β можно проводить на нескольких этапах, например, при реализации цифровых устройств удобно назначать $\beta = 1/2^k$, где k обозначает номер этапа изменения β.

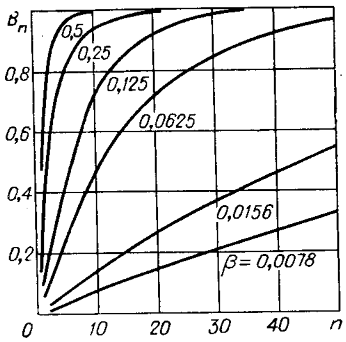

Рис. 1.

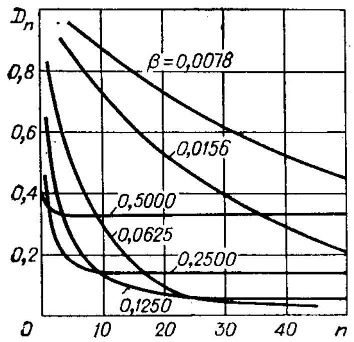

Рис. 2.

Обратимся к выбору интервала дискретизации Δt в выражении (6). В [8] получен вывод, что при соблюдении определенных условий возможно выбрать интервал дискретизации $\Delta t = \Delta t_{\text{опт}}$, при котором дисперсия оценки среднего, полученного по дискретной выборке, будет меньше, чем дисперсия оценки, полученной с учетом всего графика реализации. Выигрыш в эффективности оценки, который может быть получен при выборе оптимального интервала дискретизации, быстро убывает с ростом длины реализации T. Кроме того, $\Delta t_{\text{опт}}$ при определении различных статистических характеристик неодинаково и может являться функцией аргумента характеристики. Поэтому в практических вычислениях предпочтительней выбирать $\Delta t = \text{const}$, так как это облегчает автоматизацию обработки и не требует усложнения предварительных расчетов для нахождения $\Delta t_{\text{опт}}$, как правило, себя не оправдывающих.

При обработке экспериментальных данных необходимо знать ожидаемую точность полученных результатов. Если оценка (6) несмещенная, то ее квадрат среднеквадратического отклонения совпадает с дисперсией, которую можно принять за меру точности оценки. Определим дисперсию оценки (6):

$$D[Q^*(\alpha)] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{0}{\xi}(i\Delta t, \alpha)\right]^2 = \frac{K_\xi(0)}{n} +$$
$$+ \frac{2}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\left(1 - \frac{l}{n}\right)K_\xi(l\Delta t), \tag{19}$$

где $\overset{0}{\xi}(i\Delta t \ldots)$

$$\sum_{l=1}\left(1-\frac{l}{n}\right)K_\xi(l\Delta t) < \sum_{l=1}\left|K_\xi\left(l\frac{\tau}{m}\right)\right| < \sum_{l=1} K_\xi(0),$$

но

$$\sum_{l=1}^{m} K_\xi(0) = \frac{\tau_k}{\Delta t} K_\xi(0),$$

отсюда оценка сверху дисперсии (19) равна

$$D[Q^*(\alpha)]_{\text{в}} \leqslant \frac{\Delta t + 2\tau_k}{T} K_\xi(0). \tag{20}$$

Формула (20) дает верхнюю границу точности определения статистической характеристики случайного сигнала по дискретной выборке ординат его реализации. В нее входят центральный смешанный момент второго порядка и интервал корреляции промежуточного сигнала, полученного из исследуемого путем преобразования его основным оператором.

Запишем формулу (20) следующим образом:

$$D[Q^*(\alpha)]_{\text{в}} \leqslant \frac{2\tau_k}{T}\left(1+\frac{1}{2m}\right)K_\xi(0), \tag{21}$$

где $\Delta t = \tau_k/m$. В случае усреднения по непрерывной выборке $m=\infty$ и формула (21) примет вид

$$D[Q^*(\alpha)]_{\text{в(н)}} \leqslant \frac{2\tau_k}{T} K_\xi(0). \tag{22}$$

Относительное увеличение погрешности в определении оценки по дискретной выборке равно

$$\Delta = \sqrt{\frac{D[Q^*(\alpha)]_{\text{в}}}{D[Q^*(\alpha)]_{\text{в(н)}}}} = \sqrt{1+\frac{1}{2m}}. \tag{23}$$

График зависимости Δ от m показан на рис. 3. Из графика следует, что для сохранения практически одинаковой точности в определении оценки по дискретной выборке в сравнении с непрерывной выборкой (при одинаковом времени анализа T) интервал временной дискретизации исследуемой реализации Δt необходимо выбирать так, чтобы на интервале корреляции сигнала $\Xi(t)$ производилось 10—20 дискретных отсчетов.

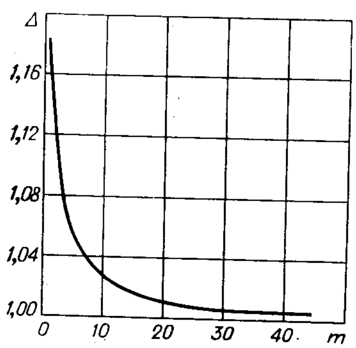

Рис. 3.

Перед обработкой случайных сигналов необходимо хотя бы приближенно уметь оценивать интервал корреляции исследуемого сигнала. Для этого можно воспользоваться следующим приемом.

Определим ширину полосы частот $\Delta\omega$ исследуемого сигнала выражением

$$\Delta\omega = \frac{1}{S(\omega_0)} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega, \tag{24}$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность исследуемого сигнала; ω_0 — частота, при которой наблюдается характерное значение спектральной плотности (например, максимум). Заметим, что полоса частот $\Delta\omega$, определяемая выражением (24), не зависит от сдвига кривой спектральной плотности $S(\omega)$ по оси частот. Следовательно, для определения $\Delta\omega$ всегда возможно перенести $S(\omega)$ в начало координат так, чтобы выполнялось равенство

$$S(\omega_0) = S(0); \tag{25}$$

тогда с учетом (25) для выражения $\Delta\omega$ имеем

$$\Delta\omega = \frac{1}{S(0)} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega. \tag{26}$$

Аналогичным образом определим интервал корреляции τ_k исследуемого сигнала, приняв его равным

$$\tau_k = \frac{1}{K(0)} \int_{0}^{\infty} K(\tau)\, d\tau, \tag{27}$$

где $K(\tau)$, $K(0)$ — соответственно корреляционная функция и дисперсия исследуемого сигнала. В случае если корреляционная функция представляется знакопеременной, то под интегралом в выражении (27) будем понимать площадь, ограниченную огибающей функцией $K(\tau)$ и осью временного сдвига τ. В рамках принятых определений имеем

$$\Delta\omega\tau_k = \pi, \tag{28}$$

или

$$\tau_k = \frac{\pi}{\Delta\omega} \frac{1}{2\Delta f}, \tag{29}$$

т. е. интервал корреляции определяется частотной полосой исследуемого сигнала.

Следовательно, для предварительной оценки интервала корреляции τ_k исследуемого сигнала из физических соображений следует определить примерную ширину его спектра. После этого по формуле (29) можно оценить ожидаемый интервал корреляции τ_k.

В заключение отметим, что автоматизация определения статистических характеристик по экспериментальным данным сводится к созданию автоматических устройств, обеспечивающих вычисление оценок средних по реализациям, полученным из исследуемых путем их преобразования основным оператором. Для упрощения специализированных устройств обработки целесообразно пользоваться введением дополнительных операторов и рекуррентным алгоритмом определения среднего, а интервал дискретизации по времени выбирать постоянным с учетом формулы (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Мирский. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М.— Л., «Энергия», 1967.
2. А. Ф. Котюк, В. В. Ольшевский, Э. И. Цветков. Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов. М.— Л., «Энергия», 1967.
3. Ю. И. Грибанов, Г. П. Веселова, В. Н. Андреев. Автоматические цифровые корреляторы. М., «Энергия», 1971.
4. С. С. Курочкин. Многоканальные счетные системы и коррелометры. М., «Энергия», 1962.
5. А. И. Галушкин, Ю. Я. Зотов, Ю. А. Шикунов. Оперативная обработка экспериментальной информации. М., «Энергия», 1972.
6. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.

7. В. В. Ольшевский, Э. И. Цветков. О толковании терминов, используемых в теории аппаратурного анализа случайных процессов.— В сб. докладов III Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ процессов и полей», т. I. Л., 1970.
8. С. Я. Виленкин. Об оценке среднего в стационарных процессах.— Теория вероятности и ее применение, т. IV, вып. 4, 1959.

Поступила в редакцию 25 июня 1972 г.

УДК 621.317.7

Я. Г. ХАИТ

(Харьков)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ УВЕЛИЧЕНИЯ ПАМЯТИ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКСТРАПОЛЯТОРА ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

Для непрерывного представления информации при дискретном контроле обычно используется фиксация последнего отсчета непрерывного процесса $x^*(iT)$ на интервале между отсчетами длиной T $(iT, iT+T)$. Средний квадрат ошибки (СКО) воспроизведения процесса $x(iT+\sigma T)$ в интервале значений σ (0,1) определяется как

$$\overline{\varepsilon_\Phi^2}(\sigma) = M\{[x^*(iT) - x(iT+\sigma T)]^2\}, \qquad (1)$$

где $M\{\}$ — знак математического ожидания; $x^*(iT) = x(iT) + q(iT)$; $q(t)$ — ошибка цифрового изменения, обычно не коррелированная с процессом $x(t)$. Для стационарных процессов $x(t)$, $q(t)$

$$\overline{\varepsilon_\Phi^2}(\sigma) = 2R_{xx}(0) - 2R_{xx}(\sigma T) + R_{qq}(0), \qquad (2)$$

где $R_{xx}(t)$, $R_{qq}(t)$ — корреляционные функции сигнала $x(t)$ и шума $q(t)$.

Для выбора интервала отсчетов T по заданной ошибке ориентиром служит либо максимальная величина СКО $\overline{\varepsilon_\Phi^2}(1)$, либо усредненная на интервале между отсчетами

$$\overline{\varepsilon_\Phi^2} = \int_0^1 \overline{\varepsilon_\Phi^2}(\sigma)\, d\sigma.$$

Очевидно, что измерение процесса имеет смысл, если СКО ошибки воспроизведения меньше дисперсии процесса, так как в противном случае в качестве значений процесса можно принять величину математического ожидания. Для случая фиксации отсчетов это условие не выдерживается даже в области сравнительно коррелированных отсчетов

$$R_{xx}(\sigma T) < 0{,}5R_{xx}(0),$$

и возникает необходимость в более точных методах обработки информации, чем фиксация отсчетов.

Точность воспроизведения процесса $x(t)$ при том же интервале T может быть увеличена за счет фиксации на интервале между отсчетами некоторой экстраполируемой величины

$$y_i = y\,[x^*(iT),\ x^*(iT-T),\ \ldots,\ x^*(iT-nT+T)].$$

Необходимость фиксации в данном случае определяется техниче-