А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1973

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ СБОРА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

УДК 621.391.272 : 62-504

В. Н. СТЕПАНЕНКО
(Рязань)

О ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПРОПУСКАМИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ИНТЕРВАЛЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Постановка задачи. В теории и практике оптимальной дискретной фильтрации существенный интерес представляет задача учета возможности потери отдельных значений входного сигнала, получаемых в дискретные равноотстоящие моменты $\bar{t}=n$ ($n=0, 1, \ldots$) относительного времени $\bar{t}=t/\Delta T$ (ΔT — интервал дискретизации) [1, 2]. Данная задача рассматривалась, например, в [3, 4] при синтезе оптимальных (в смысле минимума среднеквадратической погрешности) дискретных фильтров с постоянным интервалом наблюдения $[n-N, n]$, предназначенных для выделения и линейного функционального преобразования медленно изменяющихся полезных сигналов $u(\bar{t})$. Входным сигналом подобных устройств является конечная совокупность апостериорных данных, характеризуемая вектор-столбцом

$$V_n=\|v_{n-i}\|=U_n+S_n=\|u_{n-i}\|+\|s_{n-i}\|,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N, \qquad (1)$$

$(n-i)$-й компонент которого представляет собой независимую сумму значения полезного сигнала $u(\bar{t})$ в точке $\bar{t}=n-i$ и случайной ошибки измерения s_{n-i}, подчиняющейся нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием. Выходным сигналом преобразующих фильтров является оптимальная по заданному критерию оценка линейной функции

$$h_n\ (\theta)=\sum_{i=0}^{r} a_i\vartheta_i=A^{\mathrm{T}}\theta. \qquad (2)$$

Здесь $A=(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_r)$ — $(r+1)$-мерный вектор-столбец, элементы которого определяются видом требуемого функционального преобразования полезного сигнала $u(\bar{t})$; «Т» — символ транспонирования матрицы; $\theta=(\vartheta_0,\ \vartheta_1,\ \ldots,\ \vartheta_r)$ — вектор-столбец производных i-го ($i=0,\ 1,\ \ldots,\ r$) порядка от функции $u(\bar{t})$ в точке $\bar{t}=n$; $r\,(r\leqslant N)$ — степень аппроксимирующего полезный сигнал временного полинома

$$U_n=H\theta,\ H=\left\|\frac{(-1)^j}{j!}\,i^j\right\|(i=0,1,\ldots,N;\quad j=0,1,\ldots,r). \qquad (3)$$

В данной статье рассматриваются вопросы реализации полученных в [3, 4] оптимальных алгоритмов аппаратурной обработки случайных последовательностей с пропусками, а также методы построения и анализа качества легко реализуемых субоптимальных дискретных фильтров с постоянным и постоянным эффективным [5] интервалами наблюдения.

Предполагается, что отдельные значения обрабатываемой последовательности независимо друг от друга могут быть потеряны с вероятностью $q=(1-p)$, что ошибки $s_{n-i}(i=0, 1, \ldots, N)$ некоррелированы между собой и что параметры θ — неизвестные неслучайные величины.

Структура и реализация оптимальных дискретных фильтров с постоянным интервалом наблюдения. Полученное в [3, 4] выражение для выходной величины оптимальных преобразующих фильтров с постоянным интервалом наблюдения при отсутствии корреляции между ошибками s_{n-i} $(i=0, 1, \ldots, N)$ может быть записано следующим образом:

$$h_n^*\left(V_{j_l}\right) = \Delta_{j_l}^{\mathrm{T}} H_{j_l}^{\mathrm{T}} V_{j_l}. \tag{4}$$

Здесь $V_{j_l} = \left\| v_{n-j_l} \right\|$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ — k-мерный $(k=0, 1, \ldots, N+1)$ вектор-столбец, характеризующий совокупность принятых на интервале $[n-N, n]$ апостериорных данных v_{n-j_l} $(l=1, 2, \ldots, k;\ j_l=l-1, l, \ldots, N;\ j_1<j_2<\ldots<j_k)$; H_{j_l} — прямоугольная $k\times(r+1)$-матрица, полученная из матрицы H вычеркиванием $(N+1-k)$ строк с номерами, не равными $j_1, j_2, \ldots, j_k$; $\Delta_{j_l} = (\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ — $(r+1)$-мерный вектор-столбец, равный вектору $\left(H_{j_l}^{\mathrm{T}} H_{j_l}\right)^{-1} A$ при $k=r+1, r+2, \ldots$ $\ldots, N+1$, а при $k=0, 1, \ldots, r$, равный вектору $\left(H_{k,j_l}^{\mathrm{T}} H_{k,j_l}\right)^{-1} A_k$ с приписанными в качестве $(r+1-k)$ дополнительных компонентов нулями (индекс «-1» — символ обращения матрицы); H_{k,j_l}^{T} и A_k — матрицы, полученные из матриц $H_{j_l}^{\mathrm{T}}$ и A вычеркиванием $(r+1-k)$ последних строк, относящихся к старшим производным заданной функции (2), которыми приходится пренебрегать при $k\leqslant r$ ввиду невозможности оценки функции $(r+1)$ неизвестных параметров θ по r и менее наблюдениям [3, 4].

Учитывая, что k $(k=0, 1, \ldots, N+1)$ компонентов вектор-столбца V_n, имеющих индексы $[n-j_l]$ $(l=1, 2, \ldots, k)$, составляют вектор-столбец V_{j_l}, а остальные компоненты равны нулю (результаты соответствующих измерений потеряны), представим выражение (4) в виде

$$h_n^*\left(V_{j_l}\right) = \Delta_{j_l}^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} V_n = \Delta_{j_l}^{\mathrm{T}} Q Y_n. \tag{5}$$

Здесь $Q = \left\| \frac{(-1)^i}{i!} \delta_{ij} \right\|$ $(i, j=0, 1, \ldots, r)$ — диагональная матрица (δ_{ij} — символ Кронекера);

$Y_n = \left(y_n^0, y_n^1, \ldots, y_n^r\right) = Q^{-1} H^{\mathrm{T}} V_n$ — $(r+1)$-мерный вектор-столбец компоненты которого связаны между собой простыми реккурентными соотношениями [6]:

$$\begin{aligned} y_n^0 &= y_{n-1}^0 + v_n - v_{n-(N+1)}; \\ y_n^k &= y_{n-1}^k - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i C_k^i y_n^{k-i} - (-1)^k y_{n-1}^0 - \\ &- [N^k - (-1)^k] v_{n-(N+1)}; \quad k = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned} \tag{6}$$

Анализируя выражения (5) и (6), нетрудно видеть, что оптимальные дискретные фильтры с выходной величиной $h_n^*\left(V_{j_l}\right)$ могут быть реализованы по предложенной в [6] структурной схеме при наличии вспомогательного устройства, осуществляющего вычисление компонентов вектор-столбца Δ_{j_l} для каждого конкретного сочетания чисел $j_1, j_2, \ldots, j_k$, т. е. для каждого конкретного расположения ненулевых дискрет v_{n-j_l} $(l=1, 2, \ldots, k)$ на интервале наблюдения $[n-N, n]$.

Структура и реализация субоптимальных дискретных фильтров с постоянным интервалом наблюдения. При реализации оптимальных дискретных преобразующих фильтров наибольшие затруднения вызывает необходимость вычисления в каждый момент дискретного времени весовых коэффициентов Δ_{j_l}, определяемых конкретным расположением ненулевых дискрет обрабатываемой последовательности на интервале наблюдения. Для упрощения реализации дискретных фильтров заменим вектор Δ_{j_l} в выражении (5) вектором Δ, оптимальным в среднем для всех возможных сочетаний чисел $j_1, j_2, \ldots, j_k$. При этом выражение (5) принимает вид

$$h'_n\left(V_{j_l}\right) = \Delta^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} V_n = \Delta^{\mathrm{T}} Q Y_n = W^{\mathrm{T}} V_n, \tag{7}$$

где $W = H\Delta$ — $(N+1)$-мерный вектор-столбец весовых коэффициентов.

Устройства с выходной величиной $h'_n\left(V_{j_l}\right)$ назовем субоптимальными фильтрами с постоянным интервалом наблюдения. Очевидно, что эти устройства при постоянных компонентах вектора Δ могут быть относительно легко реализованы по предложенной в [6] структурной схеме.

Вектор Δ найдем из условия минимума среднего квадрата ошибки воспроизведения заданной функции (2). Мгновенное значение указанной ошибки с учетом выражений (1)—(3) оказывается равным

$$E_n = h'_n\left(V_{j_l}\right) - h_n(\theta) = W^{\mathrm{T}}_{j_l}\left(H_{j_l}\theta + S_{j_l}\right) - A^{\mathrm{T}}\theta, \tag{8}$$

где $W_{j_l} = H_{j_l}\Delta$ — k-мерный $(k=0, 1, \ldots, N+1)$ вектор-столбец, составленный из компонентов $w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_k}$ вектора W.

Возводя в квадрат обе части равенства (8) и учитывая неслучайность параметров θ, отсутствие корреляции между отдельными ошибками s_{n-j_l} $(l=1, 2, \ldots, k)$ и известную теорему о повторении независимых опытов [7], для среднего квадрата величины E_n будем иметь

$$\overline{E_n^2} = q^{N+1}\,\overline{E_n^2}(0) + \sum_{k=1}^{N+1} p^k q^{N+1-k} \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1<j_2<\ldots<j_k}}^{N} \cdots \sum_{j_k=k-1}^{N} \overline{E_n^2}(k, j_l), \tag{9}$$

где

$$\overline{E_n^2}(k, j_l) = M_s\left[E_n^2\right] = \Delta^{\mathrm{T}} D_{j_l}\theta\theta^{\mathrm{T}} D_{j_l}\Delta - 2\Delta^{\mathrm{T}} D_{j_l}\theta\theta^{\mathrm{T}} A + A^{\mathrm{T}}\theta\theta^{\mathrm{T}} A + \sigma_s^2\,\Delta^{\mathrm{T}} D_{j_l}\Delta. \tag{10}$$

Здесь $\overline{E_n^2}(0)$ — квадрат величины E_n при $k=0$; M_s — символ условного математического ожидания при фиксированных значениях k и $j_1, j_2, \ldots, j_k$; σ_s^2 — дисперсия ошибок измерения s_{n-i} $(i=0, 1, \ldots, N)$; $D_{j_l} = H^{\mathrm{T}}_{j_l} H_{j_l}$ — симметричная неособенная матрица порядка $(r+1)\times\times(r+1)$.

Дифференцируя величину $\overline{E_n^2}$ по компонентам вектор-столбца Δ, приравнивая частные производные к нулю и решая полученную систему уравнений относительно вектора Δ, получаем

$$\Delta = \left(\overline{Д}_{j_l} + \sigma_s^2\,\overline{D}_{j_l}\right)^{-1}\overline{D}_{j_l}\theta\theta^{\mathrm{T}} A. \tag{11}$$

Здесь $\overline{D}_{j_l}$ и $\overline{Д}_{j_l}$ — неособенные симметричные матрицы, получаемые осреднением по формуле (9) элементов матриц

$$D_{j_l} = H^{\mathrm{T}}_{j_l} H_{j_l} = \left\| \frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!} \eta_{i+j} \right\|; \; i, j = 0, 1, \ldots, r; \tag{14}$$

Указанное осреднение выполняется простой заменой в выражениях для компонентов матриц D_{j_l} и $Д_{j_l}$ случайных коэффициентов η_i и $\eta_i\eta_j$ их средними по возможным k и $j_l (l=1, 2, \ldots, k)$ значениями:

$$\overline{\eta_i} = \sum_{k=1}^{N+1} p^k q^{N+1-k} \sum_{j_1=0}^{N} \cdots \sum_{\substack{j_k = k-1 \\ j_1<j_2<\ldots<j_k}}^{N} \sum_{l=1}^{k} j_l^i = p \sum_{l=0}^{N} l^i; \quad i = 0, 1, \ldots; \tag{15}$$

$$\overline{\eta_i\eta_j} = p\left(\sum_{l=0}^{N} l^{i+j} + p \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{N} \sum_{m=0}^{N} l^i m^j\right); \quad i, j = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

В соответствии с выражением (11) компоненты оптимального в среднем вектор-столбца Δ принципиально не могут быть вычислены точно ввиду их зависимости от неизвестных составляющих переменной во времени матрицы $\theta\theta^{\mathrm{T}}$ и от дисперсии ошибок измерения. Замена указанных неизвестных величин их оценками, получаемыми с помощью вспомогательных фильтров в предыдущие моменты времени, связана, очевидно, со снижением качества фильтрации и с большими аппаратурными затратами. Для отыскания свободного от этих недостатков выражения для вектор-столбца Δ примем во внимание, что элементы матрицы $\overline{Д}_{j_l}$ практически во всех случаях намного больше соответствующих элементов матрицы $\sigma_s^2 \overline{D}_{j_l}$ и что

$$\overline{Д}_{j_l} \approx \overline{D}_{j_l} \theta\theta^{\mathrm{T}} \overline{D}_{j_l}. \tag{17}$$

Допустимость приближенного равенства (17) легко доказывается при $q \to 0$ или при $N \to \infty$.

Пренебрегая вторым слагаемым в круглых скобках равенства (11) и учитывая (17), для оптимального в среднем вектор-столбца Δ получаем относительно простое и удобное соотношение

$$\Delta \approx \overline{D}_{j_l}^{-1} A. \tag{18}$$

Структура и реализация субоптимальных дискретных фильтров с постоянным эффективным интервалом наблюдения. Оперативное запоминающее устройство субоптимальных дискретных фильтров с постоянным интервалом наблюдения предназначено главным образом для хранения $(N+1)$ последних дискретных значений входной последовательности с целью извлечения в каждый момент дискретного времени значения $v_{n-(N+1)}$, используемого при формировании составляющих (6) вектора Y_n.

Для сокращения необходимого при реализации рассматриваемых устройств объема оперативной памяти заменим в выражениях (6) величины $\left[y^k_{n-1} - N^k v_{n-(N+1)}\right]$ $(k=0, 1, \ldots, r)$ приближенными значениями βy_{n-1}^k ($\beta<1$, $k=0, 1, \ldots, r$). При этом указанные выражения принимают вид:

$$\begin{cases} y_n^0 = v_n + \beta y_{n-1}^0; \\ y_n^k = \beta y_{n-1}^k - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} C_k^i y_n^i - (-1)^k \beta y_{n-1}^0; \ k=1, 2, \ldots, r. \end{cases} \tag{19}$$

Соотношения (19) могут быть представлены следующим образом [8]:

$$y_n^k = \sum_{i=0}^{n} i^k \beta^i v_{n-i}; \quad k = 0, 1, \ldots, r, \tag{20}$$

или в матричной форме:

$$Y_n = Q^{-1} H_\beta^{\mathrm{T}} \mathrm{B} V_\beta, \tag{21}$$

где V_β и H_β — $(n+1)$-мерный вектор-столбец и $(n+1)\times(r+1)$-матрица, определяемые выражениями (1) и (3) при $N=n$,

$$B = \|\beta^i \delta_{ij}\| \quad (i, j=0, 1, \ldots, n). \tag{22}$$

При этом выходная величина дискретных преобразующих фильтров, согласно выражению (5), оказывается равной

$$h_n'\left(V_{\beta j_l}\right) = \Delta_\beta^{\mathrm{T}} Q Y_n = W_\beta^{\mathrm{T}} V_\beta = W_{\beta j_l}^{\mathrm{T}} V_{\beta j_l}. \tag{23}$$

Здесь $\Delta_\beta = \left(\Delta_0^\beta, \Delta_1^\beta, \ldots, \Delta_r^\beta\right)$ — $(r+1)$-мерный вектор-столбец, компоненты которого определяют вид и качество преобразования полезного сигнала $u(t)$; $W_\beta = BH_\beta\Delta_\beta$ — $(n+1)$-мерный вектор-столбец весовых коэффициентов; $V_{\beta j_l}$ — k-мерный ($k=0, 1, \ldots, n+1$) вектор-столбец, составленный из ненулевых компонентов v_{n-j_l} ($l=1, 2, \ldots, k$; $j_l = l-1, l, \ldots, n$; $j_1<j_2<\ldots<j_k$) вектора V_β; $W_{\beta j_l} = \mathrm{B}_{j_l} H_{\beta j_l} \Delta_\beta$ — k-мерный вектор-столбец, составленный из элементов $w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_k}$ вектора W_β; B_{j_l} — матрица, определяемая выражением (22) при $i, j=j_1, j_2, \ldots, j_k$; $H_{\beta j l}$ — матрица, получаемая из матрицы H_β вычеркиванием $(n+1-k)$ строк с номерами, не равными $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Из выражений (7) и (23) следует, что рассматриваемая процедура построения субоптимальных дискретных фильтров сводится к аппроксимации $(N+1)$-мерной последовательности весовых коэффициентов $W(n+1)$-мерной последовательностью W_β, приближающейся асимптотически к нулю при $n\to\infty$. При этом дискретные фильтры с выходной величиной (23) могут быть названы субоптимальными дискретными фильтрами с эффективной конечной памятью [5] или фильтрами с постоянным эффективным интервалом наблюдения.

Построенная по выражениям (19), (21) и (23) структурная схема рассматриваемых устройств показана на рис. 1. Сравнивая данную схему с предложенной в работе [6] схемой дискретных фильтров с конечной памятью, нетрудно убедиться в том, что для реализации субоптимальных фильтров с постоянным эффективным интервалом наблюдения потребуется существенно меньший объем оперативной памяти.

Элементы $(r+1)$-мерного вектора Δ_β, определяющие качество преобразования полезного сигнала, найдем из условия минимума среднего квадрата ошибки воспроизведения заданной функции $h_n(\theta)=A^{\mathrm{T}}\theta$ в установившемся режиме (при $n\to\infty$).

Мгновенное значение указанной ошибки равно

$$E_n = h_n'\left(V_{\beta j_l}\right) - A^{\mathrm{T}}\theta = W_{\beta j_l}^{\mathrm{T}}\left(H_{\beta j_l}\theta + S_{\beta j_l}\right) - A^{\mathrm{T}}\theta, \tag{24}$$

где $S_{\beta j_l}$ — k-мерный ($k=0, 1, \ldots, n+1$) вектор-столбец, составленный из тех компонентов вектора S_β, которые соответствуют ненулевым составляющим вектора V_β.

Пользуясь предложенной в предыдущем параграфе методикой отыскания структуры преобразующих фильтров, после несложных пре-

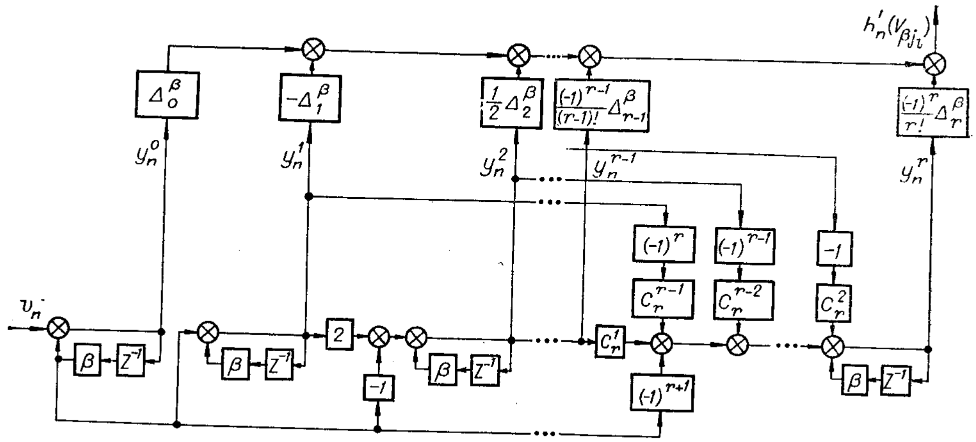

Рис. 1.

образований для вектора Δ_β получаем выражение, аналогичное соотношению (18),

$$\Delta_\beta \approx \overline{D}_{\beta j_l}^{-1} A, \tag{25}$$

где

$$\overline{D}_{\beta j_l} = \overline{H^{\mathrm{T}}_{\beta j_l} \mathrm{B}_{j_l} H_{\beta j_l}} = \left\| \frac{(-1)^{i+j}}{i!\, j!} \overline{\eta}_{1(i+j)} \right\|; \quad i,\ j = 0, 1, \ldots, r; \tag{26}$$

$$\eta_{1i} = \sum_{l=1}^{k} \beta^{j_l} j_l^i; \quad i = 0, 1, \ldots; k = 0, 1, \ldots, n+1. \tag{27}$$

Прямая черта сверху в выражениях (25) и (26) означает осреднение соответствующих элементов по формуле (9) (при $N=n$ и $n \to \infty$), выполняемое простой заменой коэффициентов η_{1i} ($i=0, 1, \ldots$) их средними значениями (при $n \to \infty$), вычисленными в приложении.

В качестве примера приведем выражения для составляющих вектор-столбцов Δ_{j_l}, Δ и Δ_β, полученные при $r=1$ из общих соотношений (4), (18) и (25):

$$\Delta_0 = \begin{cases} \dfrac{a_0\eta_2 + a_1\eta_1}{\eta_0\eta_2 - \eta_1^2}; \\ a_0; \\ 0; \end{cases} \qquad \Delta_1 = \begin{cases} \dfrac{a_0\eta_1 + a_1\eta_0}{\eta_0\eta_2 - \eta_1^2} & \text{при } k = 2, 3, \ldots, N+1; \\ 0 & \text{при } k = 1; \\ 0 & \text{при } k = 0; \end{cases}$$

$$\Delta_0 = \frac{2a_0(2N+1) + 6a_1}{p(N+1)(N+2)}; \quad \Delta_1 = \frac{6Na_0 + 12a_1}{Np(N+1)(N+2)};$$

$$\Delta_0^\beta = \frac{(1-\beta)}{p}\left[a_0(1+\beta) + a_1(1-\beta)\right];$$

$$\Delta_1^\beta = \frac{(1-\beta)^2}{p}\left[a_0 + \frac{a_1}{\beta}(1-\beta)\right].$$

Анализ эффективности применения субоптимальных дискретных фильтров. Эффективность применения дискретных преобразующих фильтров будем характеризовать величиной среднего квадрата ошибки воспроизведения заданной функции (2) в установившемся режиме.

Мгновенное значение ошибки воспроизведения функции $h_n(\theta)$ субоптимальными фильтрами с выходной величиной (7) равно

$$E_n = W_{j_l}^{\mathrm{T}} (H_{j_l}\theta + S_{j_l}) - A^{\mathrm{T}}\theta = C^{\mathrm{T}}\theta + W_{j_l}^{\mathrm{T}} S_{j_l}, \qquad (28)$$

где

$$C = D_{j_l}\Delta - A = \left\| \sum_{l=0}^{r} \frac{(-1)^{l+i}}{l!\,i!} \Delta_l \eta_{i+l} - a_i \right\|; \quad i = 0, 1, \ldots, r. \qquad (29)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (28) называется обычно динамической ошибкой воспроизведения; второе слагаемое, обусловленное присутствием случайной помехи во входном сигнале,— случайной ошибкой [8]. Вектор-столбец C представляет собой $(r+1)$-мерный вектор первых коэффициентов $c_i (i=0, 1, \ldots, r)$ динамической ошибки [4, 8].

Возводя обе части равенства (28) в квадрат и осредняя величину E_n^2 по формулам, аналогичным (9) и (10), для среднего квадрата ошибки воспроизведения заданной функции получаем

$$\overline{E_n^2} = \overline{C^{\mathrm{T}}\theta\theta^{\mathrm{T}}C} + \sigma_s^2\, \overline{W_{j_l}^{\mathrm{T}} W_{j_l}} = \theta^{\mathrm{T}}\overline{CC^{\mathrm{T}}}\theta + \sigma_s^2\, \Delta^{\mathrm{T}}\overline{D}_{j_l}\Delta. \qquad (30)$$

При фиксированных значениях σ_s^2 и составляющих матрицы $\theta\theta^{\mathrm{T}}$ эффективность применения рассматриваемых устройств может быть охарактеризована, согласно выражению (30), величинами осредненных по формуле (9) составляющих матрицы CC^{T} и средним значением коэффициента сглаживания

$$\rho = \Delta^{\mathrm{T}} D_{j_l} \Delta = \sum_{l=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^{l+k}}{l!\,k!} \Delta_l \Delta_k \eta_{l+k}, \qquad (31)$$

определяемого как отношение условного (при фиксированных k и $j_1, j_2, \ldots, j_k$) среднего квадрата случайной ошибки к дисперсии σ_s^2 [8]. Указанное осреднение выполняется простой заменой коэффициентов η_i и $\eta_i\eta_j$ их средними значениями.

Для оценки эффективности применения дискретных фильтров с постоянным эффективным интервалом наблюдения нетрудно получить соотношения, аналогичные (28)—(31). Коэффициент сглаживания ρ_β и вектор-столбец коэффициентов динамической ошибки $C_\beta = (c_0^\beta, c_1^\beta, \ldots, c_r^\beta)$ оказываются в данном случае равными:

$$\rho_\beta = \Delta_\beta^{\mathrm{T}} H_{\beta j_l}^{\mathrm{T}} \mathrm{B}_{j_l} \mathrm{B}_{j_l} H_{\beta j_l} \Delta_\beta = \sum_{l=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^{l+k}}{l!\,k!} \Delta_l^\beta \Delta_k^\beta \eta_{2(l+k)}; \qquad (32)$$

$$C_\beta = D_{\beta j_l} \Delta_\beta - A = \left\| \sum_{l=0}^{r} \frac{(-1)^{l+i}}{l!\,i!} \Delta_l^\beta \eta_{l\,(i+l)} - a_i \right\|; \quad i = 0, 1, \ldots, r, \qquad (33)$$

где η_{2i} — случайный коэффициент, определяемый по формуле (27) заменой β на β^2.

Осреднение коэффициентов ρ_β и составляющих матрицы $C_\beta C_\beta^{\mathrm{T}}$ выполняется заменой случайных коэффициентов $\eta_{1i}\eta_{1j}$ и η_{2i} их средними значениями, вычисленными в приложении (средние значения коэффициентов η_{2i} находятся путем замены β на β^2 в выражениях для $\overline{\eta}_{1i}$).

Анализируя указанные характеристики рассматриваемых устройств, можно видеть, что субоптимальные фильтры с постоянным интервалом наблюдения и постоянным эффективным интервалом наблюдения отличаются аналогичностью сглаживающих и воспроизводящих

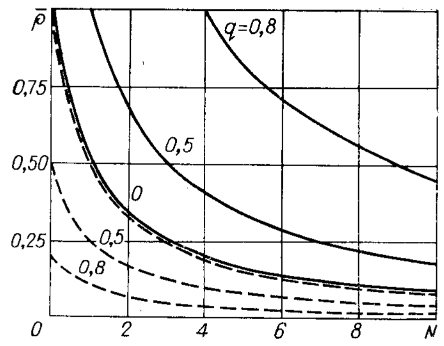

Рис. 2.

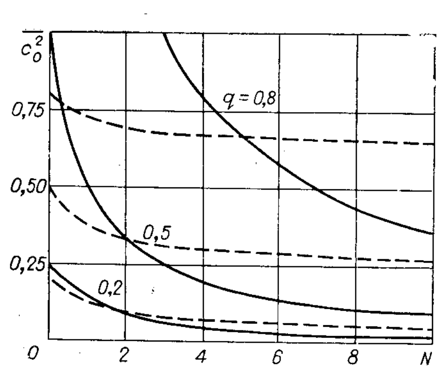

Рис. 3.

свойств и могут быть названы астатическими [8] в среднем устройствами ввиду несмещенности получаемой с их помощью оценки заданной функции, т. е. вследствие равенства нулю средних значений вектор-столбцов C и C_β:

$$\overline{C} = \overline{D}_{i_l}\Delta - A = \overline{D}_{i_l}\overline{D}_{i_l}^{-1}A - A = 0,\ \overline{C}_\beta = \overline{D}_{\beta i_l}\Delta_\beta - A = 0.$$

Заменяя в выражениях (28)—(33) вектор-столбцы Δ и Δ_β вектор-столбцами

$$\Delta' = (H^{\tau}H)^{-1}A,\ \Delta_\beta' = \lim_{n\to\infty}\left(H_\beta^{\tau}\mathrm{B}H_\beta\right)^{-1}A, \tag{34}$$

получаемыми по формулам (18) и (25) при $q=0$, нетрудно получить выражения для показателей качества дискретных фильтров с конечной и эффективной конечной памятью, построенных без учета возможности потери отдельных значений входного сигнала [6, 8]. Анализ этих выражений показывает, что подобные устройства оказываются пригодными для обработки случайных последовательностей с пропусками лишь при $q\approx 0$ ввиду значительного смещения получаемой с их помощью оценки заданной функции $\left(\overline{C}' \neq 0,\ \overline{C_\beta'} \neq 0\right)$ и недопустимо больших значений среднего квадрата динамической ошибки.

Приведем в качестве примера выражения для средних значений показателей качества сглаживающих ($a_0=1$) субоптимальных фильтров первого порядка ($r=0$):

$$\bar{\rho} = \frac{1}{p(N+1)};\quad \overline{c_0^2} = \frac{q}{p(N+1)};\quad \bar{\rho}_\beta = \frac{(1-\beta)}{p(1+\beta)};\quad \overline{(c_0^\beta)^2} = \frac{q(1-\beta)}{p(1+\beta)}.$$

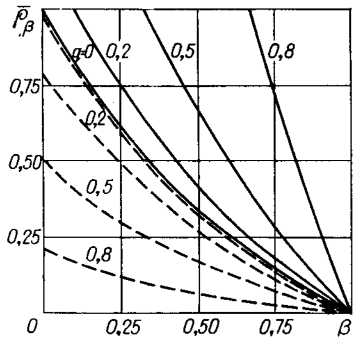

Рис. 4.

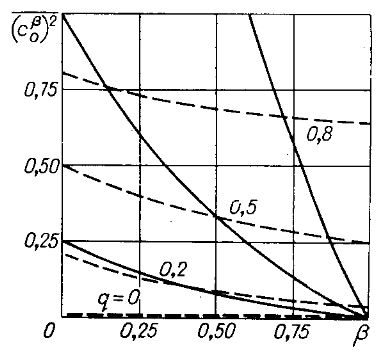

Рис. 5.

Для сглаживающих фильтров, оптимальных в условиях достоверного поступления каждого значения входного сигнала, аналогичные показатели качества имеют вид

$$\bar{\rho} = \frac{p}{(N+1)}; \quad \bar{c}_0^2 = \frac{q\,(1+Nq)}{(N+1)}; \quad \bar{\rho}_\beta = \frac{p\,(1-\beta)}{(1+\beta)}; \quad \overline{\left(c_0^\beta\right)^2} = \frac{q\,(1-\beta+2\beta q)}{(1+\beta)}.$$

Отметим, что при $\beta = \dfrac{N}{N+2}$ в обоих случаях $\bar{\rho} = \bar{\rho}_\beta$ и $\bar{c}_0^2 = \overline{\left(c_0^\beta\right)^2}$, что подтверждает факт аналогичности сглаживающих и воспроизводящих свойств дискретных фильтров с конечной и эффективной конечной памятью.

Функциональная зависимость показателей $\bar{\rho}$, $\bar{c}_0^2$, $\bar{\rho}_\beta$ и $\overline{\left(c_0^\beta\right)^2}$ от значений N, β и q дана на рис. 2—5, на которых сплошными линиями представлены характеристики субоптимальных фильтров, а штриховыми — характеристики фильтров, построенных без учета возможности потери отдельных значений входного сигнала. Сравнивая характеристики обоих типов фильтрующих устройств, можно заключить, что субоптимальные дискретные фильтры при большой инерционности ($N \to \infty$, $\beta \to 1$) обеспечивают более качественное преобразование полезного сигнала, чем фильтры, построенные без учета возможности потери отдельных значений входного сигнала. Этот факт позволяет косвенным образом судить о допустимости приближений, сделанных при выводе соотношений (18) и (25).

ВЫВОДЫ

Параметры оптимальных дискретных преобразующих фильтров зависят от расположения ненулевых значений входного сигнала на интервале наблюдения, что существенно усложняет их реализацию.

Субоптимальные алгоритмы обработки случайных последовательностей с пропусками могут быть относительно легко реализованы на универсальных ЦВМ или в виде специализированных цифровых вычислительных устройств по предлагаемым в настоящей работе структурным схемам.

Субоптимальные дискретные фильтры с постоянным и постоянным эффективным интервалом наблюдения аналогичны по своим сглаживающим и воспроизводящим свойствам и являются астатическими в среднем устройствами ввиду несмещенности получаемой с их помощью оценки заданной функции полиномиального полезного сигнала.

Полученные в работе соотношения позволяют в каждом конкретном случае определить эффективность применения субоптимальных фильтров, а также фильтров, построенных без учета возможности потери отдельных значений входного сигнала.

Приложение

Вычисление коэффициентов $\overline{\eta_{1i}}$ **и** $\overline{\eta_{1i}\eta_{1j}}$. Для средних значений (при $n \to \infty$) коэффициентов η_{1i} и $\eta_{1i}\eta_{1j}$ нетрудно получить выражения, аналогичные (15) и (16):

$$\overline{\eta_{1i}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} p^k q^{n+1-k} \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1<j_2<\ldots<j_k}}^{n} \cdots \sum_{j_k=k-1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k} \beta^{l_{j_l}} j_l^i \right) = p \sum_{l=0}^{\infty} \beta^l l^i; \quad i = 0, 1, \ldots; \qquad (\text{П.1})$$

$$\overline{\eta_{1i}\eta_{1j}} = p \left(\sum_{l=0}^{\infty} \beta^{2l} l^{i+j} + p \sum_{\substack{l=0 \\ l\neq m}}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^{l+m} l^i m^j \right); \quad i, j = 0, 1, \ldots \qquad (\text{П.2})$$

Приведем вычисленные по данным формулам выражения для коэффициентов $\overline{\eta_{1i}}$ и $\overline{\eta_{1i}\eta_{1j}}$ при некоторых значениях i и j:

$$\overline{\eta_{10}} = \frac{p}{1-\beta}; \quad \overline{\eta_{11}} = \frac{p\beta}{(1-\beta)^2}; \quad \overline{\eta_{12}} = \frac{p\beta\,(1+\beta)}{(1-\beta)^3};$$

$$\overline{\eta_{10}^2} = \frac{p\,(1+\beta-2\beta q)}{(1+\beta)(1-\beta)^2}; \quad \overline{\eta_{10}\eta_{11}} = \frac{p\beta\,[(1+\beta)^2 - q\,(1+\beta+2\beta^2)]}{(1+\beta)^2(1-\beta)^3};$$

$$\overline{\eta_{11}^2} = \frac{p\beta^2}{(1+\beta)^3(1-\beta)^4}[(1+\beta)^3 - 2q\beta\,(2+\beta+\beta^2)].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. З. Кузьмин. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Советское радио», 1967.
2. В. С. Киричук, Б. Н. Луценко. Исключение недостоверных данных.— Автометрия, 1970, № 5.
3. Ю. М. Коршунов, В. Н. Степаненко. О нелинейной дискретной фильтрации полиномиальных сигналов при наличии неудачных наблюдений.— Автоматика и телемеханика, 1971, № 7.
4. В. Н. Степаненко. О фильтрации случайных последовательностей с пропусками при полиномиальной модели движения.— В сб. «Отбор и передача информации», вып. 27. Киев, Изд-во АН УССР, 1971.
5. А. П. Рябова-Орешкова. Фильтры с эффективной конечной памятью, реализуемые на ЦВМ посредством рекуррентных формул.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, № 4.
6. В. Н. Степаненко. О реализации оптимальных дискретных фильтров.— ИВУЗ, Приборостроение, 1971, № 8.
7. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
8. Ю. М. Коршунов, А. И. Бобиков, В. Н. Степаненко. Структура и характеристики линейных цифровых сглаживающих фильтров.— В сб. «Обработка информации в автоматических системах». Труды РРТИ, вып. 11. М., «Энергия», 1968.

Поступила в редакцию 7 мая 1971 г.,
окончательный вариант — 22 сентября 1971 г.

УДК 621.317+519.21

М. Г. ЗОТОВ

(Москва)

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

В настоящее время большое внимание уделяется синтезу многомерных фильтров. Решение этой задачи приводит к необходимости решения систем интегральных уравнений. Существует два подхода к решению системы интегральных уравнений Винера — Хопфа: метод неопределенных коэффициентов и метод факторизации матрицы спектральных плотностей входа.

При решении задачи методом неопределенных коэффициентов предполагается, что вид оптимальной матрицы передаточных функций известен с точностью до коэффициентов полиномов, находящихся в числителях ее элементов.

Эти коэффициенты затем определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Однако вопрос о том, как распределяются эти коэффициенты среди элементов матрицы передаточных функций, решается довольно сложно [1].

Метод факторизации матрицы спектральных плотностей требует большого количества вычислений [1].

Методов решения системы интегральных уравнений Заде — Рагаццини пока не существует.

Ниже предлагаются довольно простые методы решения систем интегральных уравнений Винера — Хопфа и Заде — Рагаццини, которые являются обобщением методов решения аналогичных интегральных уравнений в задачах одномерной фильтрации [2].