Произведя необходимые операции в выражении (8), получим

Считаем, что все ядра в (17) равны нулю при $t-v \leqslant 0$ и $t-\tau-v \leqslant \leqslant 0$, и, преобразуя по Фурье, получаем с точностью до несущественного постоянного множителя

$$K(\omega) = \frac{\frac{S^*(\omega)}{N_0} e^{-j\omega t^0}}{1 + M_{2A}\frac{S^*(\omega)}{N_0} S(\omega)\varphi(\omega)},$$

где $\varphi(\omega) \doteqdot W(t)$ — характеристическая функция запаздывания; $K(\omega) \doteqdot \doteqdot \bar{h}(t)$ — коэффициент передачи оптимального фильтра; $S(\omega) \doteqdot u(t)$ — спектр сигнала.

Искомый фильтр состоит из согласованного фильтра $S^*(\omega)$, охваченного отрицательной обратной связью с коэффициентом обратной связи $K_{о.с}$, определяемым спектром сигнала и характеристической функцией запаздывания $K_{о.с} = M_{2A}S(\omega)\varphi(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leonard D. Berkoviz & Harri Pollard. A Non-Classical Variational Problem Arising from an Optimal Filter Problem.— Arch. Rational Mech. Anal., 1960, 26, 281—301.
2. Leonard D. Berkoviz. Some Non-Classical Variational Problems Related to Optimal Filter Problem.— Simposium on Optimisation. Zurich, 1969.
3. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., «Наука», 1966.
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., Физматгиз, 1965.
5. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1968.

Поступила в редакцию 20 марта 1972 г.

УДК 681.2.08

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ, Я. Я. ТОМСОНС

(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Введение и постановка задачи. При исследовании турбулентных потоков часто возникает необходимость определения оценок интегральных характеристик (корреляционных моментов, степени турбулентности, спектральной плотности) случайных процессов, измеряемых некоторой измерительной системой (термопарный преобразователь, термоанемометр, электродиффузионный преобразователь и т. д.). При стремлеплотности (как одной из наиболее широко используемых характеристик) входного сигнала.

Можно показать, что для малого диапазона изменений параметров исследуемого процесса (например, для пульсаций скорости, температуры и т. д.) большинство измерительных систем описывается следующим интегральным соотношением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau + n(t) = y(t) + n(t) = z(t);\ t \in [0, T), \tag{1}$$

где $k(t)$ — известная импульсная переходная функция системы; $x(t)$ и $y(t)$ — стационарные случайные процессы со спектральными плотностями $\Gamma_{xx}(\omega)$ и $\Gamma_{yy}(\omega)$, являющиеся входным и выходным сигналами; $n(t)$ — не коррелированная с $y(t)$ помеха со спектральной плотностью $\Gamma_{nn}(\omega)$. В частотной области вместо (1) имеем

$$A(\omega)\,\Gamma_{xx}(\omega) + \Gamma_{nn}(\omega) = \Gamma_{zz}(\omega), \tag{2}$$

где

$$A(\omega) = |W(i\omega)|^2;\ W(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

По аналогии с задачей восстановления входных сигналов измерительных систем задачу восстановления спектральной плотности в самом общем виде можно сформулировать как построение некоторой оценки $C_{xx}(\omega)$ для спектральной плотности входного сигнала $\Gamma_{xx}(\omega)$ по известной реализации $z(t)$ и $k(t)$ (или $A(\omega)$).

Возможны, по крайней мере, два пути решения этой задачи. Первый основывается на соотношении (1) и заключается в восстановлении реализации входного сигнала [т. е. в построении оценки $\hat{x}(t)$ для $x(t)$] и в определении по $\hat{x}(t)$ оценки для $\Gamma_{xx}(\omega)$. Второй путь состоит в определении оценки для $\Gamma_{zz}(\omega)$ и в построении оценки спектральной плотности входного сигнала с использованием (2). В работе рассматривается второй метод, который, как будет показано ниже, значительно точнее и проще первого.

Методами спектрального анализа [1] по выборочной функции $z(t)$ ($t \in [0, T]$) случайного процесса можно определить выборочную спектральную плотность $C_{zz}(\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$. Если $z(t)$ измеряется в дискретные моменты времени t_j, $t_j \in [0, T]$ ($\Delta t = t_j - t_{j-1} = \mathrm{const}$), то $\omega \in [-2\pi/\Delta t, 2\pi/\Delta t)$. В дальнейшем будем говорить, что $\omega \in \Omega$, подразумевая под Ω множество $(-\infty, \infty)$ или $[-2\pi/\Delta t, 2\pi/\Delta t)$. При правильно выбранной ширине спектрального окна B и длине реализации T оценка $C_{zz}(\omega)$ (при фиксированном $\omega \in \Omega$) обладает статистическими характеристиками:

$$M[C_{zz}(\omega)] \approx \Gamma_{zz}(\omega); \tag{3}$$

$$\mathrm{Var}\,[C_{zz}(\omega) = I/T \cdot \Gamma_{zz}^2(\omega), \tag{4}$$

где $M[x]$ — математическое ожидание; $\mathrm{Var}\,[x]$ — дисперсия случайной величины x; I — параметр, зависящий от типа спектрального окна и его ширины.

Перепишем (4) в виде

$$\mathrm{Var}\,[C_{zz}(\omega)] = \Psi_{zz}(B, T)\,\Gamma_{zz}^2(\omega). \tag{5}$$

Величина Ψ_{zz} полностью определяет систему спектрального анализа и в дальнейшем считается известной (для несглаженных спектральных оценок $\Psi_{zz} \approx 1$).

С учетом изложенного выше задачу восстановления спектральной плотности входного сигнала можно сформулировать более конкретно, а именно как построение некоторого оператора (алгоритма), действующего из пространства Z оценок $C_{zz}(\omega)$ в пространство X оценок $C_{xx}(\omega)$.

При построении такого оператора возникают задачи: А) оценка ошибки восстановления при применении различных операторов; Б) построение оптимальных операторов, минимизирующих ошибку восстановления; В) эффективная реализация оптимальных операторов (т. е. построение квазиоптимальных операторов) и оценка ошибки восстановления. Заметим, что подобные задачи в общем виде для операторных уравнений 1-го рода были рассмотрены в [2, 3].

Регуляризованное семейство оценок. Кажется естественным в качестве $C_{xx}(\omega)$ принять решение уравнения (при фиксированном $\omega \in \Omega$)

$$A(\omega) C_{xx}(\omega) = C_{zz}(\omega). \tag{6}$$

Обозначим через Ω_0 множество $\{\omega : A(\omega) \equiv 0,\ \omega \in \Omega\}$, а через Ω_1 — дополнение Ω_0 (т. е. $\Omega \setminus \Omega_0$). Тогда (6) разрешимо для всех $\omega \in \Omega_1$ и единственное решение определяется в виде

$$C_{xx}^0(\omega) = C_{zz}(\omega)/A(\omega). \tag{7}$$

Обозначим среднеквадратичную ошибку (СКО) восстановления спектральной плотности оценки (7) как

$$\overline{\varepsilon_0^2}(\omega) = M\left[\left(C_{xx}^0(\omega) - \Gamma_{xx}(\omega)\right)^2\right]. \tag{8}$$

Используя представление

$$C_{zz}(\omega) = \Gamma_{yy}(\omega) + \Gamma_{nn}(\omega) + E_{zz}(\omega), \tag{9}$$

где $E_{zz}(\omega)$ — случайная величина с $M[E_{zz}(\omega)] \approx 0$, $\mathrm{Var}\,[E_{zz}(\omega)] = \Psi_{zz}\,[\Gamma_{yy}(\omega) + \Gamma_{nn}(\omega)]^2$, и учитывая (8), (9), можно показать, что для всех $\omega \in \Omega_1$

$$\overline{\varepsilon_0^2}(\omega) = \varphi_{xx}^0(\omega)\, \Gamma_{xx}^2(\omega), \tag{10}$$

где

$$\varphi_{xx}^0(\omega) = \theta^2(\omega) + \Psi_{zz}[\theta(\omega) + 1]^2; \tag{11}$$

$$\theta(\omega) = \Gamma_{nn}(\omega)/\Gamma_{yy}(\omega). \tag{12}$$

В дальнейшем при сравнении точности восстановления при использовании различных оценок достаточно будет сопоставить сомножители φ_{xx} в выражении СКО восстановления типа (10). Из (10), (11) видно, что при фиксированном $\omega \in \Omega_1$ существует непрерывная зависимость решения (7) от правой части уравнения (6) (т. е. при $\Gamma_{nn}(\omega) \to 0$, $\Psi_{zz} \to 0$ величина $\overline{\varepsilon_0^2}(\omega) \to 0$). Таким образом, выполняются все три условия корректности по Адамару и задача восстановления спектральной плотности является корректно поставленной. Но при решении некоторых корректно поставленных задач имеет смысл применить [4] методы решения некорректно поставленных задач. Одним из таких методов является метод регуляризации [5]. Определяемое этим методом регуляризированное семейство приближенных оценок доставляет минимум функционалу (при фиксированном $\omega \in \Omega_1$)

$$\Phi_\alpha[C_{xx}, C_{zz}] = \|A(\omega)\, C_{xx}(\omega) - C_{zz}\|_z^2 + \alpha\, \|C_{xx}\|_x^2, \tag{13}$$

где α — параметр регуляризации. Оценка $C_{xx}^{\alpha}(\omega)$, минимизирующая (13), удовлетворяет уравнению

$$(\alpha+A^2(\omega))C_{xx}(\omega)=A(\omega)C_{zz}(\omega),$$

которое для всех $\omega\in\Omega_1$ имеет единственное решение

$$C_{xx}^{\alpha}(\omega)=R_{\alpha}(\omega)\,C_{zz}(\omega), \tag{14}$$

где $R_{\alpha}(\omega)=A(\omega)/[\alpha+A^2(\omega)]$ — регуляризирующий оператор.
Используя представление (9), можно показать, что для любого $\alpha>0$ и $\omega\in\Omega_1$ СКО восстановления оценки (14)

$$\overline{\varepsilon_{\alpha}^2}(\omega)=M\left[\left(C_{xx}^{\alpha}(\omega)-\Gamma_{xx}(\omega)\right)^2\right]$$

определяется как

$$\overline{\varepsilon_{\alpha}^2}(\omega)=\varphi_{xx}^{\alpha}(\omega)\,\Gamma_{xx}^2(\omega), \tag{15}$$

где

$$\varphi_{xx}^{\alpha}(\omega)=\frac{[A^2(\omega)\,\theta(\omega)-\alpha]^2+A^4(\omega)\,\psi_{zz}\,[1+\theta(\omega)]^2}{[\alpha+A^2(\omega)]^2}. \tag{16}$$

Соотношения (10), (11), (15), (16) полностью решают задачу А для двух операторов $A^{-1}(\omega)$ и $R_{\alpha}(\omega)$, отображающих пространство Z в X.

Оптимальные оценки для спектральной плотности входного сигнала. Сейчас задачу Б можно сформулировать более конкретно, а именно как построение оператора $R_{\alpha\,\text{опт}}(\omega)$ из условия минимума СКО восстановления (15), которая зависит от α только через функцию $\varphi_{xx}^{\alpha}(\omega)$. Минимизация (16) по α дает:

$$\alpha_0(\omega)=A^2(\omega)\,[\theta(\omega)+\Psi_{zz}(1+\theta(\omega))]; \tag{17}$$

$$\varphi_{xx}^{\alpha o}=\min_{\alpha}\varphi_{xx}^{\alpha}=\frac{\Psi_{zz}}{1+\Psi_{zz}}. \tag{18}$$

При этом оптимальная оценка определяется как

$$C_{xx}^{\alpha o}(\omega)=\frac{C_{zz}(\omega)}{(1+\Psi_{zz})\,(1+\theta(\omega))\,A(\omega)}. \tag{19}$$

Приведенные выше соотношения позволяют сформулировать следующее утверждение. Когда параметр регуляризации определяется как (17) и $\omega\in\Omega_1$ для всех $\theta\in[0,\infty]$, существует оптимальная регуляризованная оценка (19), минимизирующая СКО восстановления (15)

$$\overline{\varepsilon_{\alpha\,o}^2}(\omega)=\frac{\Psi_{zz}}{1+\Psi_{zz}}\Gamma_{xx}^2(\omega). \tag{20}$$

Если определить некоторый класс спектральных плотностей входного сигнала как $\{\Gamma_{xx}\}_C=\{\Gamma_{xx}(\omega):\Gamma_{xx}^2(\omega)\leqslant C^2$ для всех $\omega\in\Omega\}$, то можно получить верхнюю грань СКО восстановления для этого класса

$$\overline{\varepsilon_{c}^2}(\omega)=\sup_{\Gamma_{xx}}\overline{\varepsilon_{\alpha o}^2}(\omega)=\frac{\Psi_{zz}}{1+\Psi_{zz}}C^2 \tag{21}$$

или иначе

$$\overline{\varepsilon_{\alpha o}^2}(\omega)\leqslant\overline{\varepsilon_{c}^2}(\omega)\ \text{для}\ \Gamma_{xx}(\omega)\in\{\Gamma_{xx}\}_c. \tag{22}$$

Соотношения (20)—(22) полностью решают задачу Б. Заметим, что из этих же соотношений видна связь ошибки восстановления с точностью определения оценок спектральной плотности выходного сигнала, что позволяет правильно определить систему спектрального анализа.

Квазиоптимальные оценки для спектральной плотности входного сигнала. В выражение для выбора $\alpha_0(\omega)$ входит величина $\hat{\theta}(\omega)$, которая, как правило, неизвестна. Поэтому часто приходится ограничиваться построением квазиоптимальных оценок, а в качестве оценки для параметра θ принимать случайную величину

$$\hat{\theta}(\omega) = \frac{C_{nn}(\omega)}{C_{zz}(\omega) - C_{nn}(\omega)}, \tag{23}$$

где $C_{nn}(\omega)$ — выборочная спектральная плотность шума, определяемая по выборочной функции $n(t)$. Тогда квазиоптимальный параметр регуляризации

$$\alpha_{\text{ко}}(\omega) = A^2(\omega)\left[\hat{\theta}(\omega) + \Psi_{zz}\left(1 + \hat{\theta}(\omega)\right)\right], \tag{24}$$

а квазиоптимальная оценка

$$C_{xx}^{\alpha\text{ко}}(\omega) = \frac{C_{zz}(\omega)}{(1 + \Psi_{zz})\,(1 + \hat{\theta}(\omega))\,A(\omega)}. \tag{25}$$

По физическому смыслу величина $\theta(\omega)$ как отношение спектральных плотностей случайных процессов всегда больше или равна нулю, т. е. $\theta(\omega) \geqslant 0$. Идентичное требование накладывается и на $\hat{\theta}(\omega)$:

$$\hat{\theta}(\omega) \geqslant 0 \text{ для всех } \omega \in \Omega. \tag{26}$$

Это требование и определяет область существования оценки (25), и вызывает необходимость выделить в пространствах Z и N (пространство оценок спектральной плотности шума) подпространства $\{C_{zz}\}_{\gamma_z}$ и $\{C_{nn}\}_{\gamma_n}$, для элементов которых выполняется неравенство

$$P\{C_{zz}(\omega) - C_{nn}(\omega) > 0\} \geqslant \gamma, \tag{27}$$

где $\gamma = \gamma_z \cdot \gamma_n$. Заметим, что величины $C_{zz}(\omega)$ и $C_{nn}(\omega)$, как случайные величины при фиксированном $\omega \in \Omega$, приближенно подчиняются χ^2-распределению с $\nu_z = 2/\Psi_{zz}$ и $\nu_n = 2/\Psi_{nn}$ степенями свободы. Это позволяет определить $\{C_{zz}\}_{\gamma_z}$ и $\{C_{nn}\}_{\gamma_n}$ как подпространства в Z и N, для элементов которых выполняются неравенства:

$$P\{C_{nn}(\omega) \leqslant C^+(\omega)\} \geqslant \gamma_n. \tag{28}$$

Неслучайные величины $C^-(\omega)$ и $C^+(\omega)$ являются нижней и точной верхней границами подпространств $\{C_{zz}\}_{\gamma_z}$ и $\{C_{nn}\}_{\gamma_n}$ и равны:

$$\begin{gathered} C^-(\omega) = K^-\left[\Gamma_{yy}(\omega) + \Gamma_{nn}(\omega)\right]; \\ P\{C_{zz}(\omega) > C^-(\omega)\} \geqslant \gamma_z; \\ C^+(\omega) = K^+\Gamma_{nn}(\omega). \end{gathered} \tag{29}$$

Величины K^- $(K^- \leqslant 1)$ и K^+ $(K^+ \geqslant 1)$ находятся из неравенств:

$$P\left\{K^- < \frac{C_{zz}(\omega)}{\Gamma_{zz}(\omega)}\right\} = \gamma_z; \quad P\left\{K^+ \geqslant \frac{C_{nn}(\omega)}{\Gamma_{nn}(\omega)}\right\} = \gamma_n \tag{30}$$

при помощи таблицы χ^2-распределения. Если $C_{zz}(\omega) \in \{C_{zz}\}_{\gamma_z}$ и $C_{nn}(\omega) \in \{C_{nn}\}_{\gamma_n}$, то можно утверждать, что с вероятностью γ существует квазиоптимальная оценка (25) спектральной плотности входного сигнала. Хотя приведенные выше соотношения позволяют однозначно определить подпространства $\{C_{zz}\}_{\gamma_z}$ и $\{C_{nn}\}_{\gamma_n}$, для практического использования оценки (25) желательно определить область существования в значениях параметра θ. Наихудшей ситуацией с точки зрения

(27) является случай $C^{-}(\omega)=C^{+}(\omega)$. Это позволяет определить величину

$$\theta_{\text{пр}}=\frac{K^{-}}{K^{+}-K^{-}},\tag{31}$$

для которой еще выполняется неравенство (27). Следовательно, квазиоптимальные оценки могут быть построены, в отличие от оптимальных, только для интервала $[0, \theta_{\text{пр}}]$ с вероятностью γ.

На рис. 1 изображены зависимости $\theta_{\text{пр}}$ от числа степеней свободы оценок $C_{zz}(\omega)$ и $C_{nn}(\omega)$ при $\gamma_z=0{,}95$, $\gamma_n=0{,}95$ и $\gamma=0{,}9$.

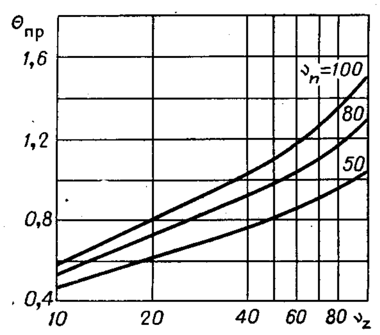

Рис. 1.

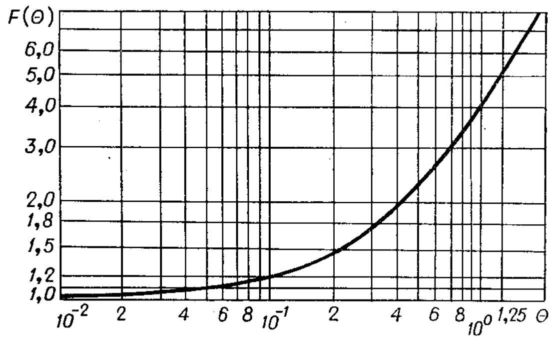

Рис. 2.

Перейдем к вопросу о точности восстановления спектральной плотности при использовании оценки (25). Величина φ_{xx}^{α} [см. (16)], а следовательно, и СКО восстановления в этом случае являются случайными [из-за их зависимости от случайной величины $\alpha_{\text{ко}}(\omega)$]. Взяв математическое ожидание от $\overline{\varepsilon_{\alpha}^{2}}(\omega)$, по ансамблю $\alpha_{\text{ко}}(\omega)$ можно получить неслучайную характеристику точности восстановления, т. е. $\overline{\varepsilon_{\alpha\text{ко}}^{2}}=M\left[\overline{\varepsilon_{\alpha}^{2}}\right]$. Вычисление точного значения $\overline{\varepsilon_{\alpha\text{ко}}^{2}}$ очень громоздко, и поэтому ограничимся приближенным выражением для $\overline{\varepsilon_{\alpha\text{ко}}^{2}}(\omega)$. Для этого разложим $\varphi_{xx}^{\alpha}(\omega)$ в ряд относительно α и учтем только первые три члена. Это, конечно, приводит к определенным погрешностям, которые, как показали модельные исследования оценки (25), не превосходят 9%. Далее, взяв математическое ожидание от этих трех членов [что требует вычисления только первых двух моментов случайной величины $\alpha_{\text{ко}}(\omega)$], можно приближенно определить СКО восстановления оценки (25):

$$\overline{\varepsilon_{\alpha\text{ко}}^{2}}(\omega)\approx\varphi_{xx}^{\alpha\text{ко}}\Gamma_{xx}^{2}(\omega).$$

Были проведены вычисления $\varphi_{xx}^{\alpha k}$ и отношения $F=\varphi_{xx}^{\alpha\text{ко}}/\varphi_{xx}^{\alpha\text{о}}$ для различных Ψ_{zz}, Ψ_{nn}, θ. Диапазон вариаций величин Ψ_{zz} и Ψ_{nn} 0,02—0,06, что соответствует степеням свободы оценок 100—33, а значения θ выбирались из интервала $[0, \theta_{\text{пр}}]$. Эти вычисления показали, что величина F зависит только от параметра θ и очень слабо от Ψ_{zz} и Ψ_{nn}. Так, при изменении Ψ_{zz} и Ψ_{nn} в указанных диапазонах относительное изменение F менее 0,1. Это позволяет очень просто находить величину $\varphi_{xx}^{\alpha\text{ко}}$ из следующего соотношения:

$$\varphi_{xx}^{\alpha\text{ко}}=F\varphi_{xx}^{\alpha\text{о}}.\tag{32}$$

На рис. 2 представлена зависимость $F(\theta)$.

Сказанное выше обобщает следующее утверждение. Для всех $\theta\in[0, \theta_{\text{пр}}]$ существует с вероятностью γ квазиоптимальная оценка а $\varphi_{xx}^{\text{ако}}$ определяется соотношением (32). В случае, если $\Gamma_{xx}(\omega)\in$ $\in\{\Gamma_{xx}\}_c$, то

$$\sup \overline{\varepsilon^2_{\alpha\text{ко}}}(\omega) \leqslant \frac{\Psi_{zz}}{1+\Psi_{zz}} FC^2. \tag{34}$$

Заметим, что для квазиоптимальной оценки имеет значение и точность определения спектральной плотности шума [т. е. $C_{nn}(\omega)$], которая [совместно с $C_{zz}(\omega)$] обусловливает область существования оценки.

Обсуждение предлагаемых алгоритмов. Ранее отмечалась возможность построения оценки спектральной плотности входного сигнала по восстановленной реализации $\hat{x}(t)$. В [6] показано, что передаточная функция фильтра, минимизирующего СКО восстановления реализации, имеет вид

$$W_\Phi(i\omega) = \frac{1}{W(i\omega)} \frac{\Gamma_{yy}(\omega)}{\Gamma_{yy}(\omega)+\Gamma_{nn}(\omega)}.$$

Можно показать, что СКО восстановления спектральной плотности в этом случае может быть представлена

$$\overline{\varepsilon^2_\Phi}(\omega) = \hat{\varphi}_{xx}\Gamma^2_{xx}(\omega), \tag{35}$$

где

$$\hat{\varphi}_{xx} = \frac{\Psi_{xx}+\theta^2(\omega)}{(1+\theta(\omega))^2}. \tag{36}$$

Сравнивая (18) и (36), отметим, что оптимальная оценка (19) является более точной. Кроме того, в общем случае фильтр $W_\Phi(i\omega)$ физически нереализуем и это приводит к дополнительным трудностям.

Рассмотрим оценку

$$C_{xx}^{-}(\omega) = \frac{C_{zz}(\omega) - C_{nn}(\omega)}{A(\omega)}. \tag{37}$$

Можно показать, что эта оценка существует для $\theta\in[0, \theta_{\text{пр}}]$ с вероятностью γ и СКО восстановления определяется так:

$$M\left[\left(C_{xx}^{-}(\omega) - \Gamma_{xx}(\omega)\right)^2\right] = \varphi_{xx}^{-}(\omega)\,\Gamma^2_{xx}(\omega), \tag{38}$$

где

$$\varphi_{xx}^{-}(\omega) = \Psi_{zz}(1+\theta(\omega))^2 + \Psi_{nn}\theta^2(\omega). \tag{39}$$

Сопоставляя СКО восстановления оптимальной и рассматриваемой оценок (37), видим, что оптимальная оценка точнее, особенно для больших значений θ. Квазиоптимальная оценка (25) тоже точнее, чем рассматриваемая, но здесь выигрыш в точности восстановления меньше, и он может быть приближенно определен по соотношениям (32) и (39). Проведенные модельные исследования показали, что квазиоптимальные оценки точнее оценок (37) на 20—50%. Большая разница достигается тогда, когда C_{zz} и C_{nn}

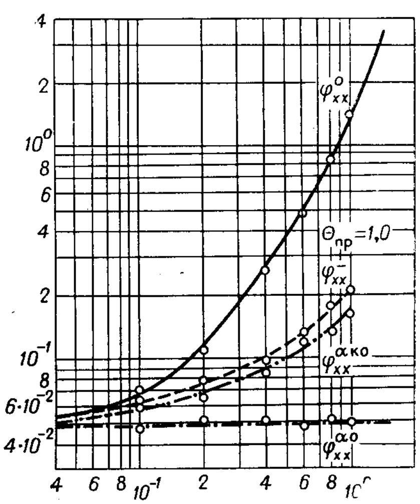

Рис. 3.

имеют различное число степеней свободы, а такая ситуация очень часто встречается в практике.

На рис. 3 приведены теоретические и экспериментальные значения φ_{xx}^{o}, $\varphi_{xx}^{\alpha o}$, $\varphi_{xx}^{\alpha ко}$. $\bar{\varphi}_{xx}$ для $\Psi_{zz} = 0{,}05$ и $\Psi_{nn} = 0{,}02$. Можно отметить хорошее совпадение значений.

В заключение кратко остановимся на одном свойстве предлагаемых оценок (19) и (25). Можно показать, что величины $\nu_0 C_{xx}^{\alpha o}(\omega)/\Gamma_{xx}(\omega)$ и $\nu_k C_{xx}^{\alpha ко}(\omega)/\Gamma_{xx}(\omega)$ приближенно подчиняются χ^2-распределению с $\nu_0 = 2/\varphi_{xx}^{\alpha o}$ и $\nu_k = 2/\varphi_{xx}^{\alpha ко}$ степенями свободы соответственно. Это свойство позволяет построить доверительные интервалы для оценок $C_{xx}^{\alpha o}$ и $C_{xx}^{\alpha ко}$ (для фиксированного $\omega \in \Omega$) с заданным уровнем доверительности.

СССР, 1968, т. 182, № 1.

3. В. А. Морозов. Об оптимальной регуляризации операторных уравнений.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970, т. 10, № 4.
4. В. А. Морозов. О восстановлении функции методом регуляризации.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967, т. 7, № 4.
5. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3.
6. В. Н. Чукреев. Сравнение детерминированного и вероятностного подходов к восстановлению входных сигналов.— Труды семинара «Теория автоматического управления», вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1969.

Поступила в редакцию 28 марта 1972 г.,
окончательный вариант — 11 августа 1972 г.

УДК 681.833 : 519.2

А. Н. ДОМАРАЦКИЙ

(Новосибирск)

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ В ЗАДАЧЕ АВТОМАТИЗАЦИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Вопросам аппаратурного определения статистических характеристик случайных сигналов посвящен ряд монографий [1—5]. Однако состояние проблемы таково, что до сих пор отсутствуют общие рекомендации по разработке оперативных устройств обработки случайных сигналов. В настоящей работе предлагаются общие замечания к задаче автоматизации определения статистических характеристик случайных сигналов, которые будут полезны при разработке и осуществлении аппаратурных средств.

Как известно [6], при анализе случайных сигналов задача обработки экспериментальных данных сводится к нахождению таких функций результатов эксперимента, которые могут быть приняты за искомые характеристики случайных сигналов. При обработке стационарных эргодических случайных сигналов за оценку искомой вероятностной