УДК 621.396

В. В. КАШИНОВ, В. А. КУЛИКОВ, Б. В. ПОНОМАРЕНКО
(Ленинград)

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В ряде задач оптимизации систем, структура которых описывается нелинейными интегральными операторами, критерии оптимальности выражаются функционалами, определенными на пространствах нелинейных интегральных операторов. Между тем общие способы нахождения экстремалей таких функционалов в рамках классического вариационного исчисления не приведены. Поэтому часто для каждого конкретного функционала разрабатывают специальный метод оптимизации (см., например, [1, 2]). В настоящей работе устанавливается необходимое условие оптимальности сложной нелинейной системы (теорема 1); исследуются особенности необходимого условия при наличии в описании структуры системы операторов дифференцирования (следствия 1.1—1.3). Далее рассматриваются системы, для которых критерии оптимальности выражаются функционалами с подвижными границами (текущее среднее) (теорема 2, следствие 2.1).

Постановка задачи. Пусть оптимизации подвергается характеристика системы $h(t)$, а критерий оптимальности описывается функцией

$$I = G(J_1, \ldots, J_j, \ldots, J_n), \tag{1}$$

где

$$J_j = \int_{x_1}^{x_2} F_j\left(\Phi_1^{j0}(x), \Phi_2^{j0}(x), \ldots, \Phi_i^{j0}(x), \ldots, \Phi_{m_j}^{j0}(x)\right) dx - \tag{2}$$

функционалы, определенные на пространствах операторов нулевого уровня $k=0$ (уровень в иерархии операторов);

$$\Phi_i^{j0}(x) = \int_{t_{01}}^{t_{02}} K_i^{j0}\left(x, t_0, \Phi_i^{j1}(t_0), \Phi_i^{j2}(t_0), \ldots, \Phi_i^{jr_1}(t_0), \ldots, \Phi_i^{js}(t_0)\right) dt_0. \tag{3}$$

В свою очередь операторы уровней k $(k=1, 2, \ldots, l_j)$ равны:

$$\Phi_i^{jr_1}(t_0) = \int_{t_{11}}^{t_{12}} K_i^{jr_1}\left(t_0, t_1, \Phi_i^{jr_11}(t_1), \ldots, \Phi_i^{jr_1r_2}(t_1), \ldots, \Phi_i^{jr_1s}(t_1)\right) dt_1; \tag{4}$$

$$\Phi_i^{jr_1\ldots r_k}(t_{k-1}) = \int_{t_{k_1}}^{t_{k_2}} K_i^{jr_1\ldots r_k}\Big(t_{k-1}, t_k, \Phi_i^{jr_1\ldots r_k1}(t_k), \ldots, \Phi_i^{jr_1\ldots r_kr_{k+1}} \times$$

$$\times (t_k), \ldots, \Phi_i^{jr_1\ldots r_ks}(t_k)\Big) dt_k;$$

$$\Phi_i^{jr_1\ldots r_{l_j}}\left(t_{l_j-1}\right) = \int_{t_{l_j1}}^{t_{l_j2}} K_i^{jr_1\ldots r_{l_j}}\left(t_{l_j-1}, t_{l_j}, h\left(t_{l_j}\right)\right) dt_{l_j},$$

где соответствующие s — функции индексов

$$s = s(j, i, r_1, \ldots, r_k), \quad k = 1, 2, \ldots, l_j;$$

$h(t)$ — оптимизируемая характеристика системы:

$$h(t) \in L_1(\Delta); \quad t \in \Delta = \left[t_{l_j1}, t_{l_j2}\right]. \tag{5}$$

Все функции $K(t, \tau, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_i(t), \ldots, u_s(t))$ суммируемы по совокупности элементов u_i; операторы Φ действуют из L_α в L_β и непрерывны ($0 \leqslant \alpha < 1$; $0 \leqslant \beta < \infty$).

Необходимое условие экстремума I. Рассмотрим задачу (1)—(5) при следующих предположениях:

1. Функции $G(J_1, \ldots, J_j, \ldots, J_n)$, $K(X_1, X_2, \ldots, X_s) \in C_1$ по совокупности переменных. В этом случае существуют соответствующие частные производные этих функций, а также частные производные операторов Φ, рассматриваемых как абстрактные функции числового аргумента γ, причем

$$\Phi'_{u_i} \varphi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \varphi = \int\limits_{s_1}^{t_2} K'_{u_i}(t, \tau, u_1(t), \ldots, u_i(t), \ldots, u_s(t))\, \varphi(t)\, dt. \qquad (6)$$

2. Считаем также, что выполнены условия дифференцируемости операторов Φ во всех точках L_α [3].

Функция I, рассматриваемая в пространстве $L_1(\Delta)$ функций $h(t)$, является функционалом $I\{h\}$, определенным на пространстве операторов, действующих из $L_1(\Delta)$.

Пусть функционал I в пространстве $L_1(\Delta)$ имеет внутренний экстремум при $h = \bar{h}(t)$. Если существует вариация $\delta I\{\bar{h}, \delta h\}$, то, как известно, необходимым условием экстремума функционала I является

$$\delta I\{\bar{h}, \delta h\} = 0 \qquad (7)$$

для любой вариации $\delta h(t) \in L_1(\Delta)$ [4].

В этом случае справедлива теорема 1. Если $h = \bar{h}(t)$, то почти всюду на Δ условие (7) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial J_j} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{\partial J_j}{\partial \Phi_i^{j0}} \prod_{\nu=1}^{l_j} \sum_{r_\nu=1}^{s} \frac{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_{\nu-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_\nu}} \frac{\partial K_i^{jr_1\ldots r_{l_j}}}{\partial h} = 0. \qquad (8)$$

Для доказательства теоремы 1 определяем вариацию δI по Гато. Тогда из условия (7) следует

$$\frac{d}{d\gamma} I\{\bar{h} + \gamma \delta h\}\Big|_{\gamma=0} = 0,$$

где I рассматривается как абстрактная функция числового аргумента γ [4].

Используем правила дифференцирования абстрактных функций числового аргумента и, меняя порядок интегрирования на основании теоремы Фубини, входим в условия действия основной леммы вариационного исчисления. Из последней непосредственно следует (8).

Пусть в описании структуры есть операторы дифференцирования, например

$$\Phi_i^{jr_1\ldots r_{k-1}a} u = \frac{\partial^p}{\partial t^p} u. \qquad (9)$$

Следствие 1.1. Если $k = 1, 2, \ldots, l_j - 1$, то (8) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial J_j} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{\partial J_j}{\partial \Phi_i^{j0}} \prod_{\nu=1}^{k-1} \sum_{r_\nu=1}^{s} \frac{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_{\nu-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_\nu}} \left(\sum_{\substack{r_k=1 \\ r_k \neq a}}^{s} \frac{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_{k-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_k}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{r_{k+1}=1}^{s} \frac{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_k}}{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_{k+1}}} \varphi_{r_k, r_{k+1}}(t_k, t) + \frac{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_{k-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1\ldots r_{k-1}a}} \sum_{\substack{r_{k+1}=1 \\ r_k=a}}^{s} \frac{\partial^p}{\partial t_{k-1}^p} \varphi_{a, r_{k+1}}(t_{k-1}, t) \right) = 0,$$

(10)

где

$$\varphi_{r_k,\, r_{k+1}}(t_k, t) = \prod_{\nu=k+2}^{l_j} \sum_{r_\nu=1}^{s} \frac{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_{\nu-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_\nu}} \frac{\partial K_i^{jr_1 \ldots r_{l_j}}}{\partial h} \times \left(t_{l_j-1},\, t\right);$$

$$a = a(j, i, r_1, \ldots, r_{k-1});\ p = p(j, i, r_1, \ldots, r_{k-1}).$$

Следствие 1.2. Пусть $k = l_j$ и допустимые функции $h(t)$ удовлетворяют заданным граничным условиям:

$$t_{l_j-1,1} = \alpha;\ h(\alpha) = A;\ t_{l_j-1,2} = \beta;\ h(\beta) = B. \tag{11}$$

Тогда (8) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial J_j} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{\partial J_j}{\partial \Phi_i^{j0}} \prod_{\nu=1}^{l_j-1} \sum_{r_\nu=1}^{s} \frac{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_{\nu-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_\nu}} \left(\sum_{\substack{r_{l_j}=1 \\ r_{l_j} \neq a}}^{s} \frac{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_{l_j-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_{l_j}}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial K_i^{jr_1 \ldots r_{l_j}}}{\partial h}(t_{l_j-1}, t) + (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial t^p} \frac{\partial K_i^{jr_1 \ldots r_{l_j-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_{l_j-1}a}}(t_{l_j-2}, t) \right) = 0. \tag{12}$$

Следствия 1.1 и 1.2 получаются, если при выводе (8) представить функцию u в (9) тождественным оператором и использовать при дифференцировании свойства обобщенной функции Дирака. Существенным моментом доказательства следствия 1.2 является использование свойств функции Дирака при конечных α и β, что позволяет не накладывать условия дифференцируемости на произвольные функции $\delta h^{(c)}(t)$ ($c = 0, 1, \ldots, p-1$). Заданность граничных значений (11) обусловливает равенство

$$\delta h^{(c)}(t)|_{t=\alpha,\beta} = 0.$$

Уравнение (12) является обобщением уравнения Эйлера — Пуассона для функций (1), определенных на пространствах операторов (3)—(4). Любое его решение $\widetilde{h}(t)$ при любых граничных условиях α, $h(\alpha)$, β, $h(\beta)$ есть экстремаль функционала (1). Это решение является искомой характеристикой системы, оптимальной по критерию (1)—(5).

Следствие 1.3. Пусть $k = l_j$ и значения $h(\alpha)$ и $h(\beta)$ не фиксированы. Тогда на экстремалях $\overline{h}(t)$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial J_j} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{\partial J_j}{\partial \Phi_i^{j0}} \prod_{\nu=1}^{l_j-1} \sum_{r_\nu=1}^{s} \frac{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_{\nu-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_\nu}} \frac{\partial^c}{\partial t_{l_j-1}^c} \times$$

$$\times \left. \frac{\partial K_i^{jr_1 \ldots r_{l_j-1}}}{\partial \Phi_i^{jr_1 \ldots r_{l_j-1}a}} \left(t_{l_j-2},\, t_{l_j-1}\right) \right|_{t_{l_j-1}=\alpha,\beta} = 0. \tag{13}$$

для всех $c = 0, 1, \ldots, p-1$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.2 с тем отличием, что значения функций $\delta h^{(c)}(t)|_{t=\alpha,\beta}$ в силу условий следствия 1.3 являются произвольными числами.

Система уравнений (13) относительно неизвестных $h(\alpha)$ и $h(\beta)$ совместно с уравнением (12) позволяет решить краевую задачу нахождения оптимальной характеристики $\overline{h}(t)$.

Задача с подвижными границами x_1 и x_2. Пусть в задаче (1)—(5) пределы функционалов J_j x_1 и x_2 не фиксированы в том смысле, что допускается вариация этих пределов при переходе от одной допустимой функции $h(t)$ к другой.

Теорема 2. Пусть на пределы x_1 и x_2 наложены связи

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1, y)=0;\\ \varphi_2(x_2, y)=0,\end{cases} \tag{14}$$

где $y=y(t)$ — функция, имеющая вариацию $\delta y(t)$. Тогда на экстремалях $\bar{h}(t)$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial J_j} \left\{ F_j\left(\Phi_1^{j0}(x), \ldots, \Phi_i^{j0}(x), \ldots, \Phi_{m_j}^{j0}(x)\right)\Big|_{x=x_2} \frac{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}} - \right.$$

$$\left. - F_j\left(\Phi_1^{j0}(x), \ldots, \Phi_i^{j0}(x), \ldots, \Phi_{m_j}^{j0}(x)\right)\Big|_{x=x_1} \frac{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}} \right\} = 0. \tag{15}$$

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1, но с учетом возможности изменения пределов интегрирования в функционалах (1).

При $y=h(t)$ условие (15) выражает связь границ x_1 и x_2 с характеристикой системы $h(t)$. Совместно с (8) и (14) это условие позволяет решить краевую задачу нахождения оптимальной характеристики аналогично условиям трансверсальности в классических вариационных задачах.

Следствие 2.1. Пусть x_1 и x_2 произвольны. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial J_j} F_j\left(\Phi_1^{j0}(x), \ldots, \Phi_i^{j0}(x), \ldots, \Phi_{m_j}^{j0}(x)\right)\Big|_{x=x_1,x_2} = 0. \tag{16}$$

Соотношения (16) — естественные граничные условия для x_1 и x_2, составляющие совместно с (8) краевую задачу нахождения $\bar{h}(t)$. Полученные соотношения позволяют легко решить упомянутую выше задачу [1, 2] для нахождения уравнения экстремали. Рассматриваемая в [1, 2] задача фильтрации сводится к минимизации функционала

$$I = \left(\int_0^\infty |y(x)|\,dx\right)^2 + \int_0^\infty (y''(x))^2\,dx \text{ при } y(0)=a,\ y'(0)=b.$$

Обозначив

$$J_1 = \int_0^\infty \Phi_1^1(x)\,dx;\ \Phi_1^1(x) = |y(x)| = y(x)\,\sigma(x);\ \sigma(x) = \operatorname{sign} y(x);$$

$$J_2 = \int_0^\infty \left(\Phi_1^2(x)\right)^2 dx;\ \Phi_1^2(x) = y''(x),$$

по формуле (12) получаем на экстремали $\bar{y}(x)$

$$2\bar{J}_1\sigma(x) + \frac{d^2}{dx^2}\bar{y}''(x) = 0 \text{ или } \bar{y}^{\mathrm{IV}}(x) + 2\bar{J}_1\sigma(x) = 0,$$

где

$$\bar{J}_1 = \int_0^\infty |\bar{y}(x)|\,dx.$$

Это уравнение получено в [1] другим, более сложным, способом.

Пример. Рассмотрим линейный фильтр с постоянными параметрами и с переходной функцией $h(\tau)$, предназначенной для оптимизации измерения амплитуды полезного сигнала. Пусть на вход фильтра воздействует процесс

$$x(t)=x_c(t)+x_n(t)+\eta(t),$$

где $x_c(t)=u(t)$ — полезный сигнал; $x_n(t)=Au(t-\tau)$ — мешающий сигнал; $\eta(t)$ — флюктуационный «белый» шум со спектральной плотностью N_0.

Параметр A является случайной величиной с законом распределения $W(A)$. Запаздывание τ — случайная величина с законом распределения $W(\tau)$, причем $W(\tau)\neq\text{const}$. Случайные величины A и τ считаем независимыми и $<x_h(t)>=0$. Отклик фильтра на $x_c(t)$

$$y_c(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t-v)\,h(v)\,dv,$$

а отклик фильтра на мешающий сигнал $x_n(t)$ равен

$$y_n(t-\tau)=A\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t-\tau-v)\,h(v)\,dv$$

и является функцией случайной величины τ.

Дисперсию σ_n^2 оценки амплитуды мешающего сигнала найдем как среднюю по времени t и по параметру A дисперсию функции $y_n(t-\tau)$

$$\sigma_n^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}W(A)\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(\tau)\,y_n^2(t-\tau)\,d\tau\,dA\,dt=$$

$$=M_{2A}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t-\tau-v)\,h(v)\,dv\right)^2 dt\,d\tau,$$

где $M_{2A}=\int\limits_0^{\infty}W(A)\,dA$. Дисперсия σ_η^2 «белого» шума равна [5]

$$\sigma_\eta^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}N_0\,\delta(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(v)\,h(v+\tau)\,dv\,d\tau=N_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}h^2(v)\,dv.$$

С учетом статистической независимости шума и мешающего сигнала суммарная дисперсия помехи равна $\sigma_n^2+\sigma_\eta^2$.

Оптимальной будем считать функцию $h(t)$, минимизирующую функционал

$$J=\frac{\sigma_n^2+\sigma_\eta^2}{y_c^2(t_0)}.$$

Получим уравнение оптимизации для функционала J. Согласно обозначениям, введенным в статье, имеем

$$J=\frac{J_1+J_2}{J_3^2};\ J_1=M_{2A}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_1(\tau)\,d\tau;\ F_1(\tau)=W(\tau)\,\Phi_1^{10}(\tau);$$

$$\Phi_1^{10}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi_1^{11}(t,\tau)\right]^2 dt;\ \Phi_1^{11}(t,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t-\tau-v)\,h(v)\,dv;$$

$$J_2=N_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}h^2(v)\,dv;$$

$$J_3=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,\Phi_1^{30}(t)\,dt;\ \Phi_1^{30}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t-v)\,h(v)\,dv.$$

Произведя необходимые операции в выражении (8), получим

Считаем, что все ядра в (17) равны нулю при $t-v\leqslant 0$ и $t-\tau-v\leqslant$ $\leqslant 0$, и, преобразуя по Фурье, получаем с точностью до несущественного постоянного множителя

$$K(\omega)=\frac{\dfrac{S^*(\omega)}{N_0}e^{-j\omega t^0}}{1+M_{2A}\dfrac{S^*(\omega)}{N_0}S(\omega)\,\varphi(\omega)},$$

где $\varphi(\omega)\doteqdot W(t)$ — характеристическая функция запаздывания; $K(\omega)\doteqdot$ $\doteqdot\bar{h}(t)$ — коэффициент передачи оптимального фильтра; $S(\omega)\doteqdot u(t)$ — спектр сигнала.

Искомый фильтр состоит из согласованного фильтра $S^*(\omega)$, охваченного отрицательной обратной связью с коэффициентом обратной связи $K_{\text{о.с}}$, определяемым спектром сигнала и характеристической функцией запаздывания $K_{\text{о.с}}=M_{2A}S(\omega)\varphi(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leonard D. Berkoviz & Harri Pollard. A Non-Classical Variational Problem Arising from an Optimal Filter Problem.— Arch. Rational Mech. Anal., 1960, 26, 281—301.
2. Leonard D. Berkoviz. Some Non-Classical Variational Problems Related to Optimal Filter Problem.— Simposium on Optimisation. Zurich, 1969.
3. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., «Наука», 1966.
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., Физматгиз, 1965.
5. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1968.

Поступила в редакцию 20 марта 1972 г.

УДК 681.2.08

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ, Я. Я. ТОМСОНС

(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Введение и постановка задачи. При исследовании турбулентных потоков часто возникает необходимость определения оценок интегральных характеристик (корреляционных моментов, степени турбулентности, спектральной плотности) случайных процессов, измеряемых некоторой измерительной системой (термопарный преобразователь, термоанемометр, электродиффузионный преобразователь и т. д.). При стремле-