ЛИТЕРАТУРА

1. С. З. Кузьмин. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Советское радио», 1967.
2. В. С. Киричук, Б. Н. Луценко. Исключение недостоверных данных.— Автометрия, 1970, № 5.
3. Ю. М. Коршунов, В. Н. Степаненко. О нелинейной дискретной фильтрации полиномиальных сигналов при наличии неудачных наблюдений.— Автоматика и телемеханика, 1971, № 7.
4. В. Н. Степаненко. О фильтрации случайных последовательностей с пропусками при полиномиальной модели движения.— В сб. «Отбор и передача информации», вып. 27. Киев, Изд-во АН УССР, 1971.
5. А. П. Рябова-Орешкова. Фильтры с эффективной конечной памятью, реализуемые на ЦВМ посредством рекуррентных формул.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, № 4.
6. В. Н. Степаненко. О реализации оптимальных дискретных фильтров.— ИВУЗ, Приборостроение, 1971, № 8.
7. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
8. Ю. М. Коршунов, А. И. Бобиков, В. Н. Степаненко. Структура и характеристики линейных цифровых сглаживающих фильтров.— В сб. «Обработка информации в автоматических системах». Труды РРТИ, вып. 11. М., «Энергия», 1968.

Поступила в редакцию 7 мая 1971 г.,
окончательный вариант — 22 сентября 1971 г.

УДК 621.317+519.21

М. Г. ЗОТОВ

(Москва)

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

В настоящее время большое внимание уделяется синтезу многомерных фильтров. Решение этой задачи приводит к необходимости решения систем интегральных уравнений. Существует два подхода к решению системы интегральных уравнений Винера — Хопфа: метод неопределенных коэффициентов и метод факторизации матрицы спектральных плотностей входа.

При решении задачи методом неопределенных коэффициентов предполагается, что вид оптимальной матрицы передаточных функций известен с точностью до коэффициентов полиномов, находящихся в числителях ее элементов.

Эти коэффициенты затем определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Однако вопрос о том, как распределяются эти коэффициенты среди элементов матрицы передаточных функций, решается довольно сложно [1].

Метод факторизации матрицы спектральных плотностей требует большого количества вычислений [1].

Методов решения системы интегральных уравнений Заде — Рагаццини пока не существует.

Ниже предлагаются довольно простые методы решения систем интегральных уравнений Винера — Хопфа и Заде — Рагаццини, которые являются обобщением методов решения аналогичных интегральных уравнений в задачах одномерной фильтрации [2].

Решение системы интегральных уравнений Винера — Хопфа. Система интегральных уравнений записывается так [3]:

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \omega_{ij}(\varepsilon) R_{\varphi kj}(t-\varepsilon)\, d\varepsilon = R_{kj}(t) \text{ при } t \geqslant 0 \quad (i; k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (1)$$

где

$$R_{\varphi kj}(\tau) = M[\varphi_k(t)\varphi_j(t-\tau)];\ R_{kj}(\tau) = M[m_k(t)\varphi_i(t-\tau)];$$

$\varphi_k(t)$ — входной сигнал с наложенной на него помехой, приложенный к k-му входу многомерного фильтра; $m_k(t)$ — желаемый выходной сигнал на k-м выходе многомерного фильтра; M — условное обозначение операции математического ожидания.

Применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям (1), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \omega_{ij}(\varepsilon) e^{-s\varepsilon} d\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\infty} R_{\varphi kj}(\theta) e^{-s\theta} d\theta = \int_{0}^{\infty} R_{kj}(t) e^{-st} dt \ (i; k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2)$$

Предположим, что корреляционные и взаимно-корреляционные функции сигналов представимы в виде:

$$R_{\varphi kj}(\theta) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{l} a_i e^{\alpha_i \theta} \text{ при } \theta > 0;\ \operatorname{Re}\alpha_i < 0; \\ \sum_{i=1}^{p} b_i e^{\beta_i \theta} \text{ при } \theta < 0;\ \operatorname{Re}\beta_i > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} R_{\varphi kj}(\theta) e^{-s\theta} d\theta = \sum_{i=1}^{p} b_i \int_{-\varepsilon}^{0} e^{\beta_i \theta} e^{-s\theta} d\theta + \sum_{j=1}^{l} a_i \int_{0}^{\infty} e^{\alpha_i \theta} e^{-s\theta} d\theta =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} b_i \frac{1}{\beta_i - s}\left(1 - e^{-(\beta_i - s)\varepsilon}\right) + \sum_{i=1}^{l} a_i \frac{1}{\alpha_i - s}; \qquad (4)$$

подставив полученное значение интеграла в (2), найдем

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{\left[\sum_{i=1}^{p} \frac{b_i}{\beta_i - s} + \sum_{i=1}^{l} \frac{a_i}{\alpha_i - s}\right] W_{ij}(s) - \sum_{i=1}^{p} \frac{b_i}{\beta_i - s} W_{ij}(\beta_i)\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{z} \frac{c_i}{\gamma_i - s} \quad (i; k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (5)$$

Таким образом, получена система линейных относительно искомых $W_{ij}(s)$ уравнений, решая которую, возможно найти $W_{ij}(s)$.

В полученные $W_{ij}(s)$ будут линейно входить постоянные $W_{ij}(s_i)$. Величины этих постоянных определяются из условий, что передаточные функции $W_{ij}(s)$ имеют полюсы, лежащие только слева от мнимой оси в плоскости комплексного переменного.

Решение системы интегральных уравнений Заде — Рагаццини. Система интегральных уравнений записывается так [3]:

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{0}^{T} \omega_{ij}(\varepsilon) R_{\varphi kj}(t-\varepsilon)\, d\varepsilon = R_{kj}(t) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{r_j} \gamma_{ijl} t^l \quad (i; k = 1, 2, \ldots, m); \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (6)$$

T — время наблюдения; γ_{ijl} — множители Лагранжа. Остальные обозначения прежние.

Предположим, как и прежде, что корреляционные и взаимно-корреляционные функции сигналов представлены в виде (3).

Левую и правую части (6) преобразуем по Лапласу на интервале существования равенства. В результате система (6) приобретет вид

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\omega_{ij}(\varepsilon)\,e^{-s\varepsilon}d\varepsilon\int_{-\varepsilon}^{T-\varepsilon}R_{\varphi kj}(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta=\int_{0}^{T}R_{kj}(t)\,e^{-st}dt+$$

$$+\sum_{l=0}^{r_j}\gamma_{ijl}\int_{0}^{T}t^{l}e^{-st}dt\quad (i;\,k=1,2,\ldots,m). \tag{7}$$

С учетом (3) запишем

$$\int_{-\varepsilon}^{T-\varepsilon}R_{\varphi kj}(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta=\sum_{i=1}^{p}b_i\int_{-\varepsilon}^{0}e^{\beta_i\theta}e^{-s\theta}d\theta+\sum_{i=1}^{l}b_i\int_{0}^{T-\varepsilon}e^{\alpha_i\theta}e^{-s\theta}d\theta=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}b_i\frac{1}{\beta_i-s}\left(1-e^{-(\beta_i-s)\varepsilon}\right)+\sum_{i=1}^{l}a_i\frac{1}{\alpha_i-s}\left(e^{(\alpha_i-s)(T-\varepsilon)}-1\right). \tag{8}$$

Подставив (8) в (7), получим

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{\beta_i-s}-\sum_{i=1}^{l}\frac{b_i}{\alpha_i-s}\right)W_{ij}(s)-\sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{\beta_i-s}W_{ij}(\beta_i)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{l}\frac{a_i}{\alpha_i-s}e^{(\alpha_i-s)T}W_{ij}(\alpha_i)\right\}=\sum_{i=1}^{r}\frac{c_i}{\alpha_i-s}\left(e^{(\alpha_i-s)T}-1\right)+$$

$$+\sum_{l=0}^{r_j}\gamma_{ijl}+\sum_{l=0}^{r_j}\gamma_{ijl}\left[\frac{l!}{s^{l+1}}-e^{-sT}\sum_{p=0}^{l}\frac{l!}{p!}\frac{T^{p}}{s^{i-p+1}}\right]\quad\left(i;\,k=1,2,\ldots,m\right). \tag{9}$$

Полученная система линейна относительно $W_{ij}(s)$. Решая ее, можно найти значения искомых передаточных функций.

Неизвестные параметры $W_{ij}(\beta_i)$ и $W^{i}{}_{j}(\alpha_i)$, линейно входящие в $W_{ij}(s)$, отыскиваются из условия минимума вектора среднеквадратичных ошибок [2], параметры γ_{ijl} — из условия, что величины моментов от искомых импульсных переходных функций заданы.

Пример. Исходные данные: имеется система с двумя входами и одним выходом. На входы системы поступают статистически не связанные шумы с корреляционными функциями, соответственно равными:

$$R_{n_1}(\tau)=e^{-|\tau|};\quad R_{n_2}(\tau)=\delta(\tau).$$

Необходимо найти оптимальные импульсные переходные функции $\omega_{11}(\tau)$ и $\omega_{12}(\tau)$ с конечной памятью T, обеспечивающие нулевые динамические ошибки по полезному регулярному сигналу типа скачка.

Систему уравнений для определения передаточных функций $W_{11}(s)$ и $W_{12}(s)$, согласно (9), для исходных данных можно записать в виде:

$$W_{11}(s)\,S_{n_1}(s)-\frac{W_{11}(1)}{1-s}-\frac{W_{11}(-1)}{1+s}e^{-T(1+s)}+\gamma_{110}\frac{1}{s}\left(e^{-sT}-1\right)=0;$$

$$W_{12}(s)\,S_{n_2}+\gamma_{120}\frac{1}{s}\left(e^{-sT}-1\right)=0.$$

Из первого уравнения

$$W_{11}(s)=\frac{1}{S_{n_1}(s)}\left\{\frac{b_0}{1-s}+\frac{c_0}{1+s}e^{-T(1+s)}-\gamma_{110}\frac{1}{s}\left(e^{-sT}-1\right)\right\},$$

где $b_0 = W_{11}(1)$; $c_0 = W_{11}(-1)$. Значения неизвестных параметров b_0, c_0, γ_{110} находим из условия минимума среднеквадратичной ошибки, учитывая равенство нулевого коэффициента ошибки единице, т. е. $W_{11}(0)=1$. Величина среднеквадратичной ошибки может быть представлена следующим образом:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\{|W_{11}(s)|^2 S_{n_1}(s) + |W_{12}(s)|^2 S_{n_2}(s)\}\,ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\left|\frac{b_0}{1-s} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{c_0}{1+s}e^{-T(1+s)} - \frac{\gamma_{110}}{s}(e^{-sT}-1)\right|^2 \frac{1-s^2}{2} + \left|\gamma_{120}\frac{1}{s}(1-e^{-sT})\right|^2\right\}ds.$$

Дифференцируя величину среднеквадратичной ошибки по b_0 и приравнивая частную производную нулю, получим

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial b_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\frac{b_0}{1-s} + \frac{c_0}{1+s}e^{-T(1+s)} - \frac{\gamma_{110}}{s}(e^{-sT}-1)\right\}\frac{1-s}{2}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{b_0 - c_0 e^{-T(1+s)} + \frac{2c_0}{1+s}e^{-T(1+s)} - \frac{\gamma_{110}}{s}(e^{-sT}-1) + \gamma_{110}(e^{-sT}-1)\right\} = 0.$$

Имея в виду, что

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{e^{-T(1+s)}}{1+s}\,ds = 0;\quad \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{e^{-sT}-1}{s}\,ds = 0,$$

предыдущее уравнение запишем следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\{b_0 - \gamma_{110} + (\gamma_{110} - c_0 e^{-T})\,e^{-sT}\}\,ds = 0,$$

откуда $b_0 = \gamma_{110} = c_0 e^{-T}$.

Дифференцируя величину среднеквадратичной ошибки по c_0 и приравнивая частную производную нулю, получим те же уравнения. Дополнительное уравнение, связывающее неизвестные параметры, можно получить из условия равенства нулю динамической ошибки, т. е. $W_{11}(0)=1$,

$$b_0 + c_0 e^{-T} - \gamma_{110}T = 2.$$

Из последнего уравнения с учетом предыдущих равенств следует

$$c_0 = \frac{2}{2-T}e^{+T};\quad b_0 = \gamma_{110} = \frac{2}{2-T}.$$

Подставим полученные параметры в выражение для передаточной функции $W_{11}(s)$; в результате находим

$$W_{11}(s) = \frac{1}{2-T}\left\{\frac{1}{s}(1-e^{-sT}) + 1 + e^{-sT}\right\}.$$

Передаточная функция $W_{12}(s)$ из основной системы уравнений описывается соотношением

$$W_{12}(s) = -\gamma_{120}\frac{1}{s}(e^{-sT}-1).$$

Так как $W_{12}(0)=1$, то $\gamma_{120} = T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Т. Леондес (ред.). Современная теория систем управления. М., «Наука», 1970.
2. М. Г. Зотов. Решение интегральных уравнений Винера — Хопфа и Заде — Рагаццини операционным методом.— Автометрия, № 1, 1972.
3. Е. И. Баранчук. Взаимосвязанные и многоконтурные регулируемые системы. Л., «Энергия», 1968.

Поступила в редакцию 3 декабря 1971 г.,
окончательный вариант — 11 ноября 1972 г.