УДК 62-505

А. М. ЯКУБОВИЧ

(*Москва*)

ОПТИМАЛЬНОЕ КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ДИАПАЗОНАМИ ИЗМЕРЕНИЯ

В целом ряде задач существенное повышение точности может быть достигнуто путем измерения сигнала несколькими приборами с различными диапазонами измерения. При этом необходимо оптимальным образом обработать показания приборов с целью достижения максимальной точности измерения. В настоящей статье находится оптимальный алгоритм обработки сигналов по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

Пусть сигнал x измеряется N приборами с выходными сигналами $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$. Верхняя и нижняя границы показаний прибора с номером $i (i=1, 2, ..., N)$ соответственно равны Y_i^+, Y_i^-. Сигнал i-го прибора в зоне линейности равен

$$Y_i = x + l_i x + z_i, \tag{1}$$

где

$$w_i = l_i x + z_i; \tag{2}$$

z_i, l_i — независимые между собой в совокупности аддитивная и мультипликативная ошибки прибора.

Считаются известными плотность вероятности сигнала $x - f_x(x)$ и погрешности $w_i - f_i(w_i)$. Ставится задача найти оптимальную оценку Y сигнала, используя показания приборов по критерию

$$M(Y-x)^2 = \min,$$

где M — операция математического ожидания.

Как известно [1], оптимальной оценкой Y является условное математическое ожидание $M[x/Y_1, Y_2, \ldots, Y_N]$, которое, согласно [2], имеет вид

$$Y = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f[Y_1, \ldots, Y_N, x]\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f[Y_1, \ldots, Y_N, x]\, dx}, \tag{3}$$

где $f[Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, x]$ — совместная плотность вероятности сигналов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, x$:

$$f[Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, x] = f[Y_1, Y_2, \ldots, Y_N/x]\, f_x(x), \tag{4}$$

где $f[Y_1, Y_2, \ldots, Y_N/x]$ — условная плотность вероятностей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ при фиксированном значении реализации x. Условная плотность вероятности представима в виде

$$f[Y_1, Y_2, \ldots, Y_N/x] = \prod_{i=1}^{N} f_i[Y_i/x], \tag{5}$$

где $f_i[Y_i/x]$ — условная плотность вероятности Y_i при фиксированном значении реализации x. Покажем это. Известно [1], что

$$f[Y_1, Y_2, \ldots, Y_N/x] = \prod_{j=1}^{N} f[Y_j/Y_{j+1}, \ldots, Y_N, x].$$

Рассмотрим условную плотность вероятности $f[Y_j/Y_{j+1}, \ldots, Y_N, x]$. Если зафиксировать значение x, то, согласно (1) и (2), реализации сигналов $Y_{j+1}, \ldots, Y_N$ дают лишь информацию о значениях ошибок $z_{j+1}, \ldots, z_N, l_{i+1}, \ldots, l_N$. Но сигналы z_i, l_i $(i = 1, \ldots, N)$ независимы по условию между собой и в совокупности и, следовательно, значения показаний $Y_{j+1}, \ldots, Y_N$ не влияют на величину условной плотности вероятности, т. е.

$$f[Y_j/Y_{j+1}, \ldots, Y_N, x] = f[Y_j/x],$$

что подтверждает формулу (5).

В зоне линейности прибора $\left(Y_i^+ \geqslant Y_i \geqslant Y_i^-\right)$ вероятность отличия Y_i от x определяется распределением погрешности w_i, поэтому

$$f_i[Y_i/x] = f_i[w_i = Y_i - x]. \tag{6}$$

Если $Y_i = Y_i^+$, то вероятность этого значения равна конечной величине, а

$$f_i[Y_i/x] = \delta\left(Y_i - Y_i^+\right) \int\limits_{Y_i^+}^{\infty} f_i[Y_i - x]\, dY_i, \tag{7}$$

где δ — знак дельта-функции. При $Y_i = Y_i^-$

$$f_i[Y_i/x] = \delta\left[Y_i - Y_i^-\right] \int\limits_{-\infty}^{Y_i^-} f_i[Y_i - x]\, dY_i. \tag{7'}$$

В частности, если z_i и l_i распределены по нормальному закону, то в зоне линейности

$$f_i[Y_i/x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left[D\left[z_i\right] + x^2 D[l_i]\right]}} \exp - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(Y_i - x - M_{w_i}\right)^2}{D\left[z_i\right] + x^2 D\left(l_i\right)}\right],$$

а при $Y_i = Y_i^+$

$$f_i[Y_i/x] = \delta\left(Y_i - Y_i^+\right) \int\limits_{Y_i^+}^{\infty} \frac{\exp - \left[\dfrac{1}{2}\, \dfrac{\left(Y_i - x - M_{w_i}\right)^2}{D\left[z_i\right] + x^2 D\left(l_i\right)}\right]}{\sqrt{2\pi\left[D\left(z_i\right) + x^2 D\left(l_i\right)\right]}}\, dY_i,$$

где $D\left[z_i\right]$, $D\left[l_i\right]$ — соответственно дисперсии z_i, l_i; M_{w_i} — математическое ожидание w_i.

Пусть показания K^+ приборов с номерами $i_1, \ldots, i_{k^+}$ находятся на верхних границах, показания K^- приборов с номерами $j_1, \ldots, j_{k^-}$ — на нижних границах. Тогда на основании формул (3)—(7) получим выражение

$$Y = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \left[\prod\limits_{s=1}^{K^+} \int\limits_{Y_{i_s}^+}^{\infty} f_{i_s}\left(Y_{i_s} - x\right) dY_{i_s} \prod\limits_{l=1}^{K^-} \int\limits_{-\infty}^{Y_{j_l}^-} f_{j_l}\left(Y_{j_l} - x\right) dY_{j_l} \times \right.}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\prod\limits_{s=1}^{K^+} \int\limits_{Y_{i_s}^+}^{\infty} f_{i_s}\left(Y_{i_s} - x\right) dY_{i_s} \prod\limits_{l=1}^{K^-} \int\limits_{-\infty}^{Y_{j_l}^-} f_{j_l}\left(Y_{j_l} - x\right) dY_{j_l} \times \right.} \to$$

$$\to \frac{\left. \times \prod\limits_{m=1}^{N-K^+-K^-} f_{r_m}\left(Y_{r_m} - x\right)\right] f_x(x)\, dx}{\left. \times \prod\limits_{m=1}^{N-K^+-K^-} f_{r_m}\left(Y_{r_m} - x\right)\right] f_x(x)\, dx}. \tag{8}$$

Для дискретных сигналов с ценой разряда x_0 и числом разрядов p, используя формулу (8), можно получить оптимальную оценку

$$Y_\rho = \frac{x_0 \sum\limits_{n=-p}^{p} n \prod\limits_{s=1}^{K^+} \sum\limits_{b=b_{i_s}^+}^{p} P_{i_s}(b - n) \prod\limits_{l=1}^{K^-} \sum\limits_{b=-p}^{b_{j_l}^-} P_{j_l}(b - n) \prod\limits_{m=1}^{N-K^+-K^-} P_{r_m}\left(b_{r_m} - n\right) P_x(n)}{\sum\limits_{n=-p}^{p} \prod\limits_{s=1}^{K^+} \sum\limits_{b=b_{i_s}^+}^{p} P_{i_s}(b - n) \prod\limits_{l=1}^{K^-} \sum\limits_{b=-p}^{b_{j_l}^-} P_{j_l}(b - n) \prod\limits_{m=1}^{N-K^+-K^-} P_{r_m}\left(b_{r_m} - n\right) P_x(n)}, \tag{9}$$

где $P_i(b_i - n)$ — вероятность ошибки i-го прибора, соответствующая $b_i - n$ разрядам; $P_x(n)$ — вероятность значения nx_0 сигнала x; b_i^+, b_i^- — верхняя и нижняя границы разрядов показаний i-го прибора. Индекс ρ при Y в (9) показывает, что необходимо брать ближайшее целое число разрядов.

Рассмотрим работу алгоритма (8) на примерах равновероятного и нормального законов распределения сигналов для $N=2$, считая, что мультипликативная погрешность отсутствует. При этом принимаем, что точность первого прибора существенно выше второго, а $|Y_1^+| = |Y_1^-| = Y_m \leqslant |Y_2^+| = |Y_2^-| \ll x_m$, где x_m — диапазон сигнала x. Для участка, где $|Y_1| < Y_m$, согласно формуле (8), имеем:

$$Y = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \left[\int\limits_{Y_m^+}^{\infty} f_1(Y_1 - x)\, dY_1 f_2(Y_2 - x) \right] f_x(x)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{Y_m^+}^{\infty} f_1(Y_1 - x)\, dY_1 f_2(Y_2 - x) \right] f_x(x)\, dx}, \tag{11}$$

если $Y_1 = -Y_m$;

$$Y = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \left[\int\limits_{-\infty}^{-Y_m} f_1(Y_1 - x)\, dY_1 f_2(Y_2 - x) \right] f_x(x)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{-Y_m} f_1(Y_1 - x)\, dY_1 f_2(Y_2 - x) \right] f_x(x)\, dx}. \tag{11'}$$

Результаты вычислений по формулам (10), (11), (11′) для равновероятных законов распределения сигналов (считая, что $2a_1 \ll 2a_2 \ll 2a_x$, где a_1, a_2, a_x — полудиапазоны соответственно w_1, w_2, x) сведены в таблицу. На рисунке (кривая *1*) приведена зависимость $Y = f\left(\frac{Y_2 - Y_m}{\sigma_1}\right)$ при $Y_1 = Y_m$, $\sigma_1 = a_1/\sqrt{3}$, $\sigma_2/\sigma_1 = 5$.

Для нормального закона распределения сигналов на линейном участке, где $|Y_1| < Y_m$, из формулы (8) получим известное [2] выражение

$$Y = \frac{Y_1 \frac{1}{\sigma^2} + Y_2 \frac{1}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_x^2}}, \tag{12}$$

где σ_1, σ_2, σ_x — соответственно среднеквадратические отклонения погрешностей w_1, w_2, сигнала x. Полагаем, что $\sigma_1 \ll \sigma_2 \ll \sigma_x$. При $Y_1 = Y_m$ или $Y_1 = -Y_m$ и сигналах Y_2, для которых справедливы условия

$$\int\limits_{Y_m}^{\infty} f_1(Y_1 - x = Y_2)\, dY_1 \approx 1 \tag{13}$$

или

$$\int\limits_{-\infty}^{-Y_m} f_1(Y_1 - x = Y_2)\, dY_1 \approx 1,$$

будем иметь

$$Y \approx \frac{Y_2 \frac{1}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_x^2}}. \tag{14}$$

№ п.п.	Соотношения сигналов	Выражение для выходного сигнала
1	$Y_1 + a_1 \leqslant Y_2 + a_1$ $Y_1 - a \geqslant Y_2 - a_2$ $\lvert Y_1 \rvert < Y_m$	$Y = Y_1$
2	$Y_1 + a_1 > Y_2 + a_2$ $Y_1 - a_1 \geqslant Y_2 - a_2$ $\lvert Y_1 \rvert < Y_m$	$Y = \dfrac{Y_1 + Y_2 + a_2 - a_1}{2}$
3	$Y_1 + a_1 \leqslant Y_2 + a_2$ $Y_1 - a_1 < Y_2 - a_2$ $\lvert Y_1 \rvert < Y_m$	$Y = \dfrac{Y_1 + Y_2 + a_1 - a_2}{2}$
4	$Y_1 - a_1 > Y_2 + a_2$ $Y_1 + a_2 < Y_2 - a_2$ $\lvert Y_1 \rvert < Y_m$	$Y = 0$
5	$Y_m - a_1 \leqslant Y_2 + a_2 \leqslant Y_m + a_1$ $Y_2 - a_2 < Y_m - a_1$ $Y_1 = Y_m$	$Y = \dfrac{2}{3}\left(Y_2 + a_2 + \dfrac{Y_m - a_1}{2}\right)$
6	$Y_2 + a_2 \geqslant Y_m + a_1$ $Y_2 - a_2 \geqslant Y_m - a_1$ $Y_1 = Y_m$	$Y = \dfrac{1}{2}(Y_2 + Y_m + a_2) - \dfrac{1}{6}\,\dfrac{a_1^2}{Y_2 - Y_m + a_2}$
7	$Y_2 + a_2 > Y_m + a_1$ $Y_m + a_1 \geqslant Y_2 - a_2 > Y_m - a_1$ $Y_1 = Y_m$	$Y = Y_m + \dfrac{-\dfrac{a_1^3}{6} - \dfrac{(Y_2 - Y_m - a_2)^3}{3} + a_1\left[(Y_2 - Y_m + a_2)^2 - \dfrac{(Y_2 - Y_m - a_2)^2}{2}\right]}{-\dfrac{a_1^2}{2} - \dfrac{(Y_2 - Y_m - a_2)^2}{2} + a_1\left[2(Y_2 - Y_m + a_2) - (Y_2 - Y_m - a_2)\right]}$
8	$Y_2 - a_2 > Y_m + a_1$ $Y_1 = Y_m$	$Y = Y_2$
9	$-Y_m - a_1 \leqslant Y_2 - a_2 <$ $< -Y_m + a_1$ $Y_2 + a_2 > -Y_m + a_1$ $-Y_m = Y_1$	$Y = \dfrac{2}{3}\left(Y_2 - a_2 - \dfrac{Y_m + a_1}{2}\right)$
10	$Y_2 - a_2 \leqslant -Y_m - a_1$ $Y_2 + a_2 \geqslant -Y_m + a_1$ $Y_1 = -Y_m$	$Y = \dfrac{1}{2}(Y_2 - Y_m - a_2) - \dfrac{1}{6}\,\dfrac{a_1^2}{(Y_2 + Y_m - a_2)}$

Окончание таблицы

№ п.п.	Соотношения сигналов	Выражение для выходного сигнала
11	$Y_m - a_1 \geqslant Y_2 + a_2 > Y_m + a_1$ $Y_2 - a_2 < -Y_m - a_1$ $Y_1 = -Y_m$	$Y = -Y_m + \dfrac{\dfrac{a_1^3}{6} - \dfrac{(Y_2+Y_m+a_2)^3}{3} - a_1 \times \left[(Y_2+Y_m-a_2)^2 - \dfrac{(Y_2+Y_m+a_2)^2}{2}\right]}{-\dfrac{a_1^2}{2} - \dfrac{(Y_2+Y_m+a_2)^2}{2} - a_1 \times [2(Y_2+Y_m-a_2)+(Y_2+Y_m+a_2)]}$
12	$Y_1 = -Y_m$ $Y_2 + a_2 < -Y_m - a_1$	$Y = Y_2$

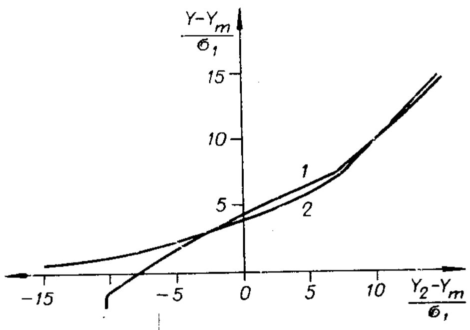
Для $Y_1 = Y_m$ при сигналах Y_2, для которых не выполняются условия (13), интегралы в числителе и знаменателе формулы (11) не берутся. На рисунке (кривая *2*) приведена приближенная зависимость $Y = f\left(\dfrac{Y_2 - Y_m}{\sigma_1}\right)$ при $Y_1 = Y_m$ $\sigma_2/\sigma_1 = 5$.

Из рассмотрения таблицы, рисунка и формул (12)—(14) можно сделать следующие выводы.

Сигнал первого прибора на линейном участке. Сигналы приборов усредняются с учетом весов (для нормального закона) или смещений (для равномерного закона). Веса и смещения зависят от точности приборов.

Сигнал первого прибора на грани. Если сигнал Y_2 существенно больше Y_m, критерием чего является условие (13), выходной сигнал определяется показаниями второго прибора.

Если условие (13) не выполняется, то при $Y_2 = Y_m$ выходной сигнал смещен в сторону больших по абсолютной величине сигналов (для $\sigma_2/\sigma_1 = 5$ смещение на $(4 \div 4{,}2)\ \sigma_1$). По мере дальнейшего увеличения Y_2 выходной сигнал Y асимптотически приближается к Y_2, если отсутствует ограничение диапазонов погрешностей. Для ограниченных диапазонов погрешностей выходной сигнал $Y = Y_2$, если разность $Y_2 - Y_m$ более полусуммы диапазонов приборов или равна ей.



С уменьшением Y_2 по отношению к Y_m выходной сигнал асимптотически приближается к Y_m для случая неограниченных по величине предельных погрешностей. При ограниченных предельных погрешностях выходной сигнал по мере снижения Y_2 уменьшается и становится равным нулю, если разность $Y_m - Y_2$ равна полусумме диапазонов и более.

В заключение отметим, что оценить дисперсию ошибки с учетом алгоритма (8) в общем случае довольно трудно, так как требуется применение специальной вычислительной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных процессов. М., Машгиз, 1963.
2. Д. А. Браславский, А. М. Якубович. Оптимальное преобразование сигналов нескольких приборов с учетом погрешностей и отказов.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 10.

Поступило в редакцию 13 марта 1972 г.